

VIII. UVOD U STATISTIČKO ZAKLJUČIVANJE

Neophodni matematički pojmovi za razumevanje teksta u ovoj glavi:

Osnovni pojmovi teorije verovatnoće

U Glavama IV i V prikazali smo statističke postupke koji se uobičajeno zovu deskriptivnom statistikom jer služe statističkom opisu uzorka ili populacije na osnovu podataka. Dakle, deskriptivni statistički postupci mogu se koristiti za statističku analizu skupa podataka bez obzira na to da li je taj skup podataka dobijen na uzorku ili na celokupnoj populaciji. Na primer, pravljenje raspodele učestalosti za neku varijablu, računanje aritmetičke sredine kao mere lokacije ili određivanje kvantila možemo primeniti kako na podacima za uzorak, tako i na podacima za celokupnu populaciju. Međutim, postupke koje ćemo prikazati u glavama IX i X, a koji spadaju u tzv. inferencijalnu statistiku ili statistika zaključivanja, ima smisla koristiti samo u situacijama kada na osnovu podataka dobijenih na uzorku želimo da zaključujemo o populaciji ili procesu koji je generisao podatke. Inferencijalna statistika obuhvata postupke koji služe za statističko zaključivanje. Statističko zaključivanje se odnosi na primenu statističkih postupaka radi zaključivanja o populaciji ili procesu koji je generisao podatke na osnovu podataka dobijenih na uzorku, tj. na podskupu entiteta iz date populacije ili na podskupu podataka iz datog procesa pri čemu je podskup podataka izabran po određenim principima. Prema tome, nema nikakvog opravdanja primenjivati ove postupke ako raspoložemo podacima za sve članove populacije o kojoj zaključujemo: u tom slučaju dovoljno je koristiti deskriptivne statističke postupke. Na primer, podaci iz statističkih popisa u kojima su obuhvaćeni svi članovi populacije u principu se obrađuju deskriptivnim statističkim postupcima. Statističko zaključivanje zasnovano je u potpunosti na pojmovima, principima i teoremama teorije verovatnoće te preporučujem čitaocu da se tokom proučavanja teksta u ovoj glavi vrati na pojmove koje smo objasnili u Glavi III kada god oseti da mu je to potrebno. Teorija i osnovni postupci tzv. klasičnog statističkog zaključivanja koje ćemo objasniti u ovoj glavi začetni su tokom prve polovine XX veka u radovima Ronalda Fišera (Ronald Aylmer Fisher) sa jedne, i Egona Pirsona (Egon Pearson) i Ježija Nejmana (Jerzy Neyman) sa druge strane.⁹ Međutim, Fišerov i Nejman-Pirsonov pristup određenim aspektima statističkog zaključivanja bitno su različiti, te ćemo na odgovarajućim mestima u ovom tekstu njihove pristupe izložiti odvojeno.¹⁰

Dakle, ključne odlike statističkog zaključivanja su:

- a) zasnovano je na teoriji verovatnoće te se u zaključcima koristi probabilistički rečnik;
- b) zaključci se donose na osnovu podataka prikupljenih na uzorku;

⁹ Ponekada se u matematičko-statističkoj literaturi na našem jeziku prezime statističara J. Neymana transkribuje kao Nojman. Verujemo da je do te pogrešne transkripcije došlo zbog brkanja ovog prezimena sa prezimenom poznatog matematičara Nojmana (Neuman).

¹⁰ Inače, između Fišera, sa jedne, i Nejmana i E. Pirsona, sa druge strane, pored razlike u pristupu određenim aspektima statističkog zaključivanja, postojala je i lična netrpeljivost, što se jasno može uočiti i u njihovim polemičkim radovima (cf. Fisher, 1955; Pearson, 1955; Neyman, 1956).

- c) zaključci, tj. ishodi statističkog zaključivanja predstavljaju generalizacije koje se odnose na populaciju iz koje je posmatrani uzorak ili na proces za koji se pretpostavlja da je generisao podatke.

U pojedinim psihološkim časopisima odnedavno je čak zabranjeno u radovima koristiti postupke klasične inferencijalne statistike a preporučena primena statistike svodi se na deskriptivne statističke postupke na velikim uzorcima (cf. Trafimow & Marks, 2015). Ovi radikalni potezi nisu za sada naišli na masovnije odobravanje u naučnim psihološkim krugovima (cf. Moris et al., 2015). Smatramo da je zabranjivanje inferencijalnih statističkih postupaka neopravdano radikalni potez i da klasični inferencijalni statistički postupci, bez obzira na njihove slabosti i probleme do kojih dolazi u njihovoj primeni, mogu poslužiti kao korisno oruđe istraživačima u psihologiji i srodnim oblastima. Mi se, međutim, ne zalažemo ni za onaj stav po kojem su inferencijalni statistički postupci obavezan sastavni deo istraživanja u psihologiji. Do otkrića velikog značaja i dometa u psihološkoj nauci može se doći bez korišćenja inferencijalnih statističkih postupaka. Setimo se samo istraživanja Ebinghausa, Stivensa, Bartleta, Pjažea i Skinera u kojima ovi postupci uopšte nisu korišćeni. Primena inferencijalnih statističkih postupaka opravdana je u određenim vrstama istraživanja u psihologiji i srodnim oblastima a rezultati njihove primene trebalo bi da posluže kao valjan empirijski argument pri proveravanju određenih istraživačkih hipoteza. Međutim, rezultati do kojih se dolazi primenom inferencijalnih statističkih postupaka ne mogu biti jedini i apsolutni argument u tim proverama. Pri razmatranju rezultata do kojih se dolazi primenom inferencijalnih statističkih postupaka istraživači treba da uzmu u obzir pretpostavke koje su uključene u izvođenje statističkih postupaka, kao i slabosti, nedostatke i ograničenja ovih postupaka. Posebno treba imati na umu da statističko zaključivanje na osnovu opservacija, tj. rezultata posmatranja dobijenih na uzorku nije principijelno moguće sa izvesnošću deduktivne logike! Naime, u deduktivnoj logici zaključak **nužno** sledi iz premisa. U statističkom zaključivanju, međutim, zaključci do kojih dolazimo na osnovu rezultata dobijenih na uzorku, samo su **manje ili više verovatni i uvek nose sobom neizvesnost i određeni rizik greške koji se mogu kvantifikovati**. Prema tome, korišćenjem inferencijalnih statističkih postupaka nije moguće dokazati istinitost određene istraživačke pretpostavke: rezultati do kojih dolazimo primenom ovih postupaka mogu samo podržati istraživačku pretpostavku ili ne biti u skladu sa njom, tj. mogu ovu pretpostavku učiniti više ili manje izglednom ili prihvatljivom (plauzibilnom). Rezultati primene statističkih inferencijalnih postupaka treba da posluže pre kao početak nego kao kraj razmišljanja o istraživačkim hipotezama i teorijama zbog kojih je istraživanje započeto.

Radi potpunijeg razumevanja načina na koji se opravdava upotreba postupaka statističkog zaključivanja u psihologiji i srodnim oblastima korisno je napraviti distinkciju između istraživanja sa prebrojavanjem (engl. *enumerative studies*) i analitičkih istraživanja (Hahn & Meeker, 1993).¹¹

U istraživanjima sa prebrojavanjem istraživač nastoji da na osnovu podataka dobijenih na uzorku zaključuje o karakteristikama populacije koja realno egzistira kao konačni agregat jedinica koje se mogu identifikovati. Uzorak na osnovu kojeg se zaključuje

¹¹ Istraživanja u psihologiji i srodnim oblastima uobičajeno se u udžbenicima metodologije klasifikuju na drugačiji način (cf. Todorović, 2009, Fajgelj, 2020). Ovde je, dakle, reč o klasifikaciji koja deli istraživanja isključivo na osnovu razmatranja njihovog statističkog aspekta. Distinkcija između enumerativnih i analitičkih istraživanja prvi put je podrobno izložena u radu poznatog statističara Deminga objavljenom u časopisu *The American Statistician* (cf. Deming, 1975).

izabran je iz populacije prema principima teorije uzorkovanja.¹² Populacija u tom slučaju predstavlja okvir za uzorkovanje budući da se svaki član populacije može jasno identifikovati.¹³ Tipičan primer ovakvih istraživanja bila bi tzv. pregledna istraživanja (engl. *survey*) sa ciljem da se oceni stanje u populaciji neke zemlje u pogledu određenog socijalnog ili ekonomskog pitanja (na primer, stopa nezaposlenosti, globalni ekonomski trendovi, stopa korišćenja alkohola ili droga, stopa pušenja cigareta), istraživanja javnog mnjenja radi sticanja uvida u aktuelno mišljenje celokupne populacije neke zemlje ili nekog određenog segmenta te populacije (na primer, određenog regiona) o određenoj temi. Ispitivanja rasprostranjenosti primene određenih vaspitnih postupaka u porodicama u nekoj zemlji ili određenom regionu, kao i epidemiološka istraživanja nasilja nad decom u porodici u određenoj zemlji predstavljaju takođe primere istraživanja sa prebrojavanjem. Psihometrijska istraživanja radi definisanja normi za određeni psihološki merni instrument mogli bismo u osnovi takođe svrstati u ovaj tip istraživanja.¹⁴ Biohemijska i medicinska istraživanja radi određivanja tzv. referentnih intervala za različite laboratorijske analize (na primer krvi, urina) spadaju takođe u istraživanja sa prebrojavanjem.¹⁵ U istraživanjima sa prebrojavanjem ispravnost statističkih zaključaka podrazumeva slučajno ili probabilističko uzorkovanje a takvo uzorkovanje je u ovakvom tipu istraživanja (teorijski posmatrano) ostvarivo.

U analitičkim istraživanjima nema realno egzistirajuće, jasno definisane, konačne populacije, u smislu skupa entiteta koji se mogu identifikovati i prebrojati, već se na osnovu podataka koji se dobijaju u ispitivanju postojećeg *procesa* zaključuje o budućem hipotetičkom procesu. Takva istraživanja dominiraju u psihologiji i srodnim oblastima. Termin proces u određenju analitičkih istraživanja treba shvatiti u najopštijem smislu. U analitička istraživanja spadaju praktično sva eksperimentalna istraživanja, kao i neeksperimentalna istraživanja u kojima se ispituju modeli relacija između varijabli. Na primer, ukoliko ispituju kakve efekte imaju određeni vaspitni postupci na decu određenog uzrasta mi najčešće želimo da na osnovu ispitivanja iskustava određene grupe dece i njihovih roditelja zaključujemo o efektima tih vaspitnih postupaka na decu u određenom uzrastu uopšte a ne samo na decu iz geografski ograničenog prostora koja se nalaze u tom uzrastu u trenutku izbora uzorka. Dakle, ovakvo istraživanje sprovodimo kako bismo zaključili kakve efekte će imati ti vaspitni postupci i na decu koja sada nisu u tom uzrastu kada budu došla u taj uzrast. Isto tako, ako poredimo efekte određenih terapijskih postupaka na smanjenje anksioznosti mi zapravo želimo na osnovu takvih istraživanja da zaključimo koji od tih postupaka će imati jače a koji slabije efekte imajući u

¹² Teorija uzorkovanja u osnovi predstavlja primenu teorije verovatnoće na proces biranja uzorka.

¹³ U istraživanjima sa prebrojavanjem se zapravo pravi distinkcija između ciljne populacije (engl. *target population*) i okvira uzorkovanja (engl. *sampling frame*). Ciljna populacija obuhvata sve članove koji pripadaju populaciji na osnovu definicije date populacije, a okvir uzorkovanja obuhvata one članove date populacije koji imaju šansu da uđu u uzorak. Poklapanje ciljne populacije i okvira uzorkovanja ne mora biti potpuno jer iz različitih razloga neki članovi ciljne populacije mogu biti nedostupni za uzorkovanje. Na primer, ako okvir uzorkovanja za istraživanje na školskoj deci određenog uzrasta podrazumeva da će se uzorkovanje vršiti na osnovu spiska državnih škola, školska deca iz privatnih škola postaju na taj način "nedostupna" za proces uzorkovanja i premda po definiciji spadaju u ciljnu populaciju nisu uključena u okvir uzorkovanja.

¹⁴ Norme za psihološki merni instrument sadrže određene statističke pokazatelje (npr. aritmetičku sredinu, standardnu devijaciju, percentile) koji se u merenju oslonjenom na norme (engl. *norm based measurement*) koriste za tumačenje rezultata pojedinačnih ispitanika.

¹⁵ Referentni intervali služe u medicinskoj dijagnostici za tumačenje individualnih rezultata laboratorijskih analiza. Svaki individualni rezultat koji je izvan granica referentnog intervala smatra se indikacijom za dalja medicinska ispitivanja.

vidu hipotetičku populaciju ljudi u stanju anksioznosti. Predviđanje rezultata izbora pre nego što su oni održani takođe bi spadalo u analitička istraživanja jer se na osnovu ispitivanja aktuelnog raspoloženja potencijalnih birača želi predvideti budući proces.

Dakle, istraživanja sa prebrojavanjem u psihologiji i srodnim oblastima zapravo su znatno ređa od analitičkih istraživanja. To je veoma važno imati na umu jer je statističko zaključivanje na osnovu analitičkih istraživanja mnogo složenije od zaključivanja na osnovu istraživanja sa prebrojavanjem. Naime, u statističko zaključivanje na osnovu analitičkih istraživanja nužno je uključena veoma važna pretpostavka koju je skoro nemoguće proveriti a prema kojoj je „proces o kojem želimo da zaključujemo statistički identičan sa procesom iz kojeg uzimamo uzorak za istraživanje“ (Hahn & Meeker, 1993, str. 4).

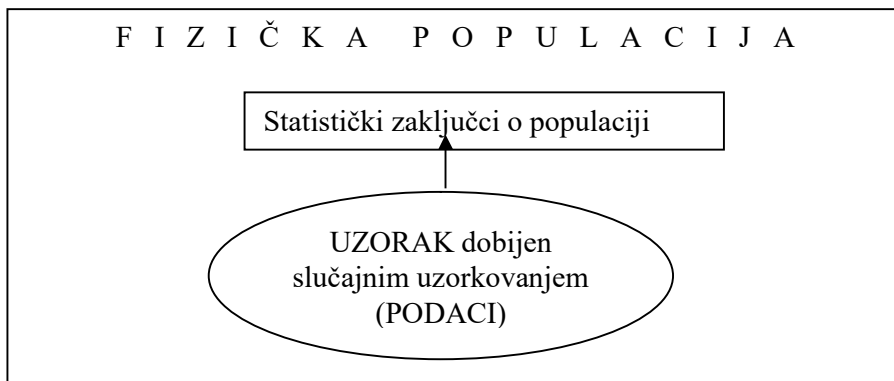
Razlikovanje istraživanja sa prebrojavanjem i analitičkih istraživanja veoma je važno jer omogućuje da se kako-tako izađe na kraj sa jednim od najvećih problema u korišćenju statističkog zaključivanja sa kojim se sreću istraživači u psihologiji i srodnim oblastima – praktično odsustvo slučajnog uzorkovanja u ortodoksnom statističkom smislu tog pojma. Slučajno ili probabilističko uzorkovanje, tj. biranje podskupa populacije po određenim principima (o čemu će biti reči u narednom odeljku ove glave) u statističkim se knjigama jasno ističe kao ključni uslov za primenu statističkog zaključivanja. U istraživanjima sa prebrojavanjem, budući da je populacija o kojoj se zaključuje jasno definisana i da je u principu moguće napraviti okvir uzorkovanja (na primer, spisak svih članova populacije) probabilističko uzorkovanje je, barem u principu, sasvim izvodljivo. Za primenljivost statističkog zaključivanja u takvim istraživanjima pretpostavka slučajnog uzorkovanja od kritične je važnosti. Međutim, u analitičkim istraživanjima se na osnovu uzorkovanog sadašnjeg *procesa* zaključuje o procesu koji čak i ne mora da postoji u trenutku istraživanja. Budući da u takvim istraživanjima ne postoji populacija u smislu agregata jedinica koje se u datom trenutku (barem u principu ako ne i praktično) mogu prebrojiti (tzv. fizička populacija), nema ni realnog okvira za uzorkovanje iz kojeg bi se, prema principima teorije uzorkovanja, izvlačio slučajni uzorak. Populacija u takvim istraživanjima je konceptualna, hipotetička, tj. statistička populacija. Na taj način, pitanja *reprezentativnosti* uzorka i primenljivosti statističkog zaključivanja uopšte u analitičkim istraživanjima postavljaju se u mnogo oštrijem obliku nego što je to slučaj u istraživanjima sa prebrojavanjem. Reprezentativnost uzorka odnosi se na stepen u kojem uzorak prema svim bitnim karakteristikama “liči” na “populaciju” o kojoj se zaključuje. Reprezentativnost uzorka u istraživanjima sa prebrojavanjem obezbeđuje se (makar principijelno) samim postupkom uzorkovanja. Naime, probabilističko uzorkovanje predstavlja, statistički posmatrano, pravoveran način obezbeđivanja reprezentativnosti uzorka i opravdavanja korišćenja statističkog zaključivanja. Budući da je u analitičkim istraživanjima, zbog nepostojanja okvira uzorkovanja, nemoguće bukvalno primeniti postupke probabilističkog uzorkovanja, veoma je važno da se obezbedi reprezentativnost opservacija (podataka iz posmatranog procesa) za proces o kojem se želi zaključivati. To je moguće ukoliko se u postupke za prikupljanje podataka o posmatranom procesu uvedu određeni elementi slučajnog biranja i dodatne pretpostavke o prirodi samog tog procesa. Na primer, u eksperimentalnim istraživanjima se u te svrhe veoma često primenjuje postupak randomizacije, tj. slučajnog razmeštanja jedinica posmatranja na različite nivoe eksperimentalnog faktora čije se dejstvo na zavisnu varijablu ispituje. Isto tako, u mnogim istraživanjima u psihologiji i srodnim oblastima često se uvodi (ponekad i prećutno) dodatna pretpostavka prema kojoj se određeni procesi odvijaju na isti način kod svih ljudi te se, prema tome, ni ne postavlja pitanje uopštljivosti (generalizabilnosti) rezultata na

populaciju jer se uopštljivost unapred pretpostavlja. Statističko zaključivanje u takvim istraživanjima služi za procenu uloge slučaja, tj. slučajne greške u determinisanju ishoda (cf. Sohn, 1991). Kako bi se opravdala upotreba postupaka statističkog zaključivanja u analitičkim istraživanjima neophodno je veoma brižljivo planirati istraživanje, te obezbediti da specifični postupci prikupljanja opservacija iz konceptualne, statističke populacije budu relevantni za proces o kojem se zaključuje, tj. da posmatrani proces dobro reprezentuje onaj proces o kojem se žele doneti zaključci. U takvim istraživanjima se na skup opservacija, tj. rezultata posmatranja nekog procesa gleda kao na manje ili više reprezentativan uzorak mogućih opservacija iz procesa o kojem zaključujemo. U sam postupak prikupljanja rezultata u analitičkim istraživanjima trebalo bi da budu uključeni elementi slučajnog uzorkovanja. Pokušaćemo da to pojednostavljeno ilustrujemo na jednom primeru: ako neki kognitivni proces za koji pretpostavljamo da se na isti način odvija kod svih veštih čitača datog jezika (na primer identifikovanje pojedinačnih reči u procesu čitanja) proučavamo na studentima početnih godina psihologije onda bi izbor studenata koje ćemo uključiti u ispitivanje trebalo da bude slučajan a ne da uključimo samo studente koji se dobrovoljno prijave za istraživanje. Ukoliko, pri tom, istraživanje podrazumeva poređenje nekoliko eksperimentalnih grupa kojima bismo davali zadatak identifikovanja reči u različitim eksperimentalnim uslovima raspoređivanje ispitanika u grupe trebalo bi da bude slučajno, tj. randomizovano. U principu planom istraživanja treba omogućiti kontrolu irelevantnih faktora koji mogu biti od uticaja na odvijanje proučavanog kognitivnog procesa a koji nisu prema zamisli istraživača uključeni u istraživanje, tj. potrebno je obezbediti kontrolu tzv. spoljnih varijabli (podrobnije o metodološkim postupcima kontrole spoljnih varijabli čitalac se može informisati u Todorović, 2009, str. 85–107). U statističkom zaključivanju na osnovu rezultata analitičkih istraživanja potrebno je biti veoma oprezan a dobijene zaključke potrebno je replicirati na različitim uzorcima. Pored toga, pri izvođenju istraživačkih zaključaka treba voditi računa o tome da je stvarna neizvesnost u zaključivanju o hipotetičkoj, konceptualnoj populaciji ili budućem procesu znatno veća od one koju u kvantifikovanom obliku dobijemo na osnovu primene postupaka statističkog zaključivanja. (Kod istraživanja sa prebrojavanjem, ako je uzorkovanje izvedeno kako treba, neizvesnost u zaključivanju o realno egzistirajućoj populaciji odgovara neizvesnosti koja se u kvantifikovanom obliku dobija statističkim zaključivanjem). Dakle, u donošenju istraživačkih zaključaka na osnovu analitičkih istraživanja statističke zaključke treba tretirati sa mnogo više opreza nego pri donošenju istraživačkih zaključaka na osnovu istraživanja sa prebrojavanjem, ukoliko je u potonjim istraživanjima izabran probabilistički uzorak po pravilima uzorkovanja.

Statističko zaključivanje nije nužno ograničiti samo na istraživanja sa prebrojavanjem, tj. na situacije u kojima na osnovu podataka slučajnog uzorka ili podskupa *fizičke* (prebrojive, konačne) populacije zaključujemo o toj populaciji, kako je to prikazano na Slici 8.1. (Populacija je na Slici 8.1 predstavljena celim pravougaonikom a uzorak iz te populacije elipsom).

Slika 8.1

Shematski prikaz užeg shvatanja statističkog zaključivanja kao zaključivanja o širem konačnom skupu (populaciji) na osnovu podataka sa podskupa dobijenog slučajnim uzorkovanjem iz skupa o kojem se zaključuje

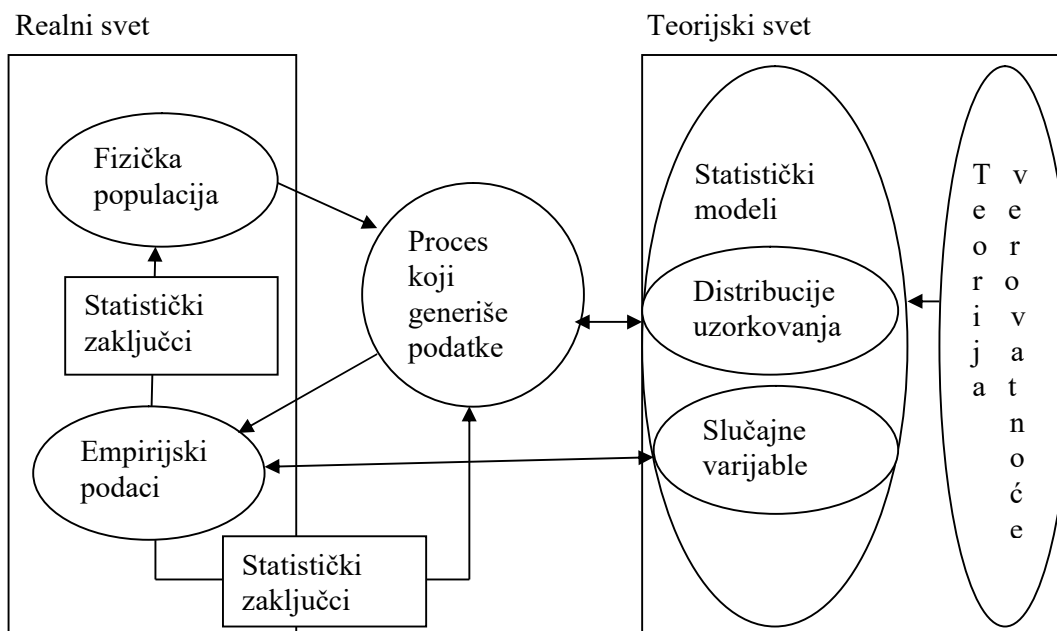


Statističko zaključivanje u najširem smislu predstavlja primenu statističkih modela na empirijske podatke radi donošenja statističkih zaključaka o populaciji ili procesu koji je proizveo podatke. Primenjujući statističke modele (modele koji su zasnovani prevashodno na aksiomama i teoremama teorije verovatnoće) na podatke radi donošenja statističkih zaključaka o populaciji ili procesu koji je generisao podatke mi se implicitno “izjašnjavamo” u prilog tome da su variranja u podacima dovoljno dobro obuhvaćena primenjenim statističkim modelom (cf. Kass, 2011). Dakle, kvalitet statističkih zaključaka o procesu koji je generisao podatke, i, posledično, relevantnost statističkih zaključaka za naučno utemeljeno zaključivanje o realnim fenomenima kojima se bavimo zavisi velikim delom od toga u kojoj meri statistički modeli koje primenjujemo odgovaraju, tj. dobro opisuju podatke na osnovu kojih donosimo statističke zaključke. Ono o čemu je važno voditi računa, posebno pri donošenju statističkih zaključaka o procesu koji je generisao podatke u analitičkim istraživanjima, jeste reprezentativnost podataka za skup o kojem se zaključuje. Naime, u istraživanjima sa prebrojavanjem reprezentativnost podataka obezbeđuje se samim adekvatnim izborom uzorka iz skupa o kojem se zaključuje, tj. iz fizičke populacije, dok je u analitičkim istraživanjima radi dobijanja reprezentativnih podataka potrebno valjano statističko i generalno metodološko umeće te dobro poznavanje oblasti koja se istražuje.

Statističko zaključivanje u najširem smislu mogli bismo shematski predstaviti onako kako je prikazano na Slici 8.2 (modifikovano prema Kass, 2011 i Lu & Henning, 2012):

Slika 8.2

Cxematski prikaz statističkog zaključivanja u najširem smislu



U nastavku ovog teksta, jednostavnosti radi, mi ćemo koristiti uglavnom termin populacija podrazumevajući pod tim skup na koji se odnose statistički zaključci, bilo da je reč o realno postojećoj, fizičkoj populaciji entiteta, hipotetičkoj ili konceptualnoj populaciji ili, pak, procesu koji je proizveo podatke. *Statističke mere koje opisuju kvantitativne karakteristike populacije ili procesa uobičajeno zovemo **parametrima**, a statističke mere koje opisuju kvantitativne karakteristike uzorka zovemo **statisticima**.*¹⁶ Za označavanje statistika u ovoj knjizi koristimo latinička slova, a za označavanje parametara grčka slova. Na primer, aritmetičku sredinu populacije označavamo grčkim slovom μ , a aritmetičku sredinu uzorka latiničkim M. Nažalost, u malom broju situacija moraćemo da odstupimo od ovog principa, a kada god se desi takvo odstupanje to ćemo posebno istaći.

¹⁶ U statističkoj literaturi na našem jeziku statistička mera dobijena na uzorku uobičajeno se zove *statistika*. Pretpostavljamo da je oblik ove imenice u ženskom rodu preuzet iz ruskog jezika budući da su ranije generacije matematičara-statističara u našoj zemlji pretežno koristile ruske izvore za statističko obrazovanje. Ženski rod ove imenice u ruskom jeziku sasvim je opravdan budući da se njime izbegava brkanje ovog naziva sa ruskim terminom za statističara – статистик. Mi ćemo u ovom tekstu svesno odstupiti od ovog uobičajenog naziva u koristićemo termin *statistik* u muškom rodu kako bismo izbegli brkanje naziva statističke mere uzorka sa nazivom same discipline statistike. Uostalom, u psihološkim i metodološkim krugovima u našoj zemlji je, delom i zaslugom autora ove knjige, već odomaćen naziv statistik.

Dva glavna segmenta statističkog zaključivanja jesu:

1. **Ocenjivanje parametara**, tj. kvantitativnih karakteristika populacije (ili procesa koji je generisao podatke) pomoću statistika, tj. kvantitativnih karakteristika **slučajnog** uzorka iz date populacije ili procesa.¹⁷
2. **Testiranje statističke značajnosti ili testiranje statističkih hipoteza**, tj. donošenje odluke o odbacivanju ili neodbacivanju određene **statističke hipoteze** na osnovu podataka dobijenih na uzorku. Statistička hipoteza je formalni iskaz o određenoj kvantitativnoj karakteristici populacije ili procesa koji je generisao podatke i najčešće se formuliše u obliku tzv. **nulte hipoteze**.

Za razumevanje pojedinih segmenata statističkog zaključivanja neophodno je poznavati barem osnovne pojmove teorije izbora uzorka, tj. teorije uzorkovanja. Te pojmove ćemo u ovom tekstu izložiti veoma sažeto, u meri koja omogućuje razumevanje bazičnih principa statističkog zaključivanja.¹⁸ Postupci uzorkovanja koje ćemo ukratko prikazati praktično su primenljivi prevashodno u istraživanjima koja smo u prethodnom delu teksta nazvali istraživanjima sa prebrojavanjem.

Kratak pogled na teoriju izbora uzorka, tj. na teoriju uzorkovanja

Uzorak (engl. *sample*)

Uzorak je deo populacije, podskup koji je izabran iz populacije obično tako da je dobro reprezentuje i na kojem se vrši istraživanje. Uzorci se dobijaju iz populacije **uzorkovanjem**.

Uzorkovanje (engl. *sampling*)

Uzorkovanje je postupak kojim se iz osnovnog skupa, tj. populacije bira ili uzima podskup elemenata kako bi se na ovom podskupu izvršilo posmatranje ili istraživanje i potom, na osnovu dobijenih podataka, zaključivalo o populaciji. Cilj ispitivanja koje se izvodi na uzorku jeste zaključivanje o karakteristikama osnovnog skupa ili populacije koju reprezentuje izabrani uzorak. Teorija uzorkovanja, tj. teorija biranja ili uzimanja uzoraka je veoma složena matematička disciplina čije potpunije razumevanje podrazumeva poznavanje određenih matematičkih oblasti na veoma visokom nivou. Stoga ćemo o postupku uzorkovanja u ovom tekstu dati samo najvažnije napomene koje će, nadamo se, čitaocu omogućiti da stekne barem globalnu predstavu o principima izbora uzorka. Da bi se uzorkovanje moglo valjano izvesti neophodno je, pre svega,

¹⁷ U okviru statističkog ocenjivanja razvijeno je nekoliko pristupa: klasični, Bajesovski, teorija minimaksnih ocena, teorija ekvivarijantnih ocena i sl. U ovom tekstu korišćena je tzv. klasična teorija ocenjivanja koju su razvili R. Fišer, J. Nejman, E. Pirson, H. Kramer, S.R. Rao i drugi.

¹⁸ Elementi teorije uzorkovanja koji su izloženi ovde nikako ne mogu poslužiti kao dovoljna osnova za praktično izvođenje uzorkovanja. Kada se nađe u situaciji u kojoj je potrebno praktično definisati uzorak za određeno istraživanje, čitalac bi trebalo da se o tome konsultuje sa statističarima koji se bave uzorkovanjem ili da prouči knjige posvećene teorijskim i praktičnim aspektima uzorkovanja (npr. Cochran, 1977, Sukhatme, Sukhatme, & Asok, 1984).

imati spisak ili listu jedinica za uzorkovanje (engl. sampling units). Ovaj spisak svih članova populacije ili lista jedinica za uzorkovanje predstavlja okvir za uzorkovanje (engl. sampling frame) iz kojeg se određenim postupcima izvlače jedinice u uzorak. Generalno, postoje dve kategorije uzoraka: slučajni (probabilistički) i neprobabilistički. Izvlačenje uzoraka prve kategorije uzoraka zasniva se na teoriji verovatnoće ta je, prema tome, za svakog člana populacije, ili za svaki uzorak određene veličine, načelno moguće odrediti verovatnoću biranja u uzorak. Kod neprobabilističkih uzoraka ova verovatnoća međutim nije poznata. Na osnovu probabilističkih uzoraka moguće je, primenom statističke teorije, ocenjivati (engl. estimate) karakteristike populacije i odrediti grešku uzorkovanja (engl. sampling error), tj. moguće je odrediti koliku grešku pravimo kada na osnovu karakteristika uzorka zaključujemo o karakteristikama populacije koju uzorak reprezentuje.

U pogledu načina na koji se samo izvlačenje jedinica u uzorak praktično odvija, najčešće se uzorkovanje izvodi bez vraćanja, a ne sa vraćanjem. Kod uzorkovanja sa vraćanjem član populacije se vraća u spisak iz kojeg se bira pre izvlačenja sledeće jedinice uzorka, dok se kod uzorkovanja bez vraćanja član populacije koji je jednom izabran pri sledećem izvlačenju, ako bude opet izabran, preskače.

Slučajno ili probabilističko uzorkovanje (engl. *random sampling*)

Slučajni uzorak se dobija **slučajnim uzorkovanjem** (engl. random sampling). Slučajno uzorkovanje odvija se tako da svaki uzorak određene veličine (uređeni skup od n elemenata) iz neke populacije ima istu šansu da bude izabran. Definicija da je slučajni uzorak takav da "svaki element populacije ima jednaku verovatnoću da bude izabran" tačna je samo kod uzorkovanja sa vraćanjem.

Ako se iz populacije od N članova vrši slučajni izbor bez vraćanja i ako uzorak definišemo kao neuređen skup, uzorak je n -kombinacija elemenata populacije, a ako se vrši sa vraćanjem rezultat izbora je n -varijacija elemenata populacije. Svaka n -varijacija elemenata populacije može biti izabrana sa verovatnoćom N^{-n} ili, što je isto, $1/N^n$. To je ekvivalentno sa uslovom prema kojem se u svakom pojedinačnom izboru pojedini element bira sa verovatnoćom N^{-1} pri čemu su pojedinačni izbori nezavisni. Rezultat svakog pojedinačnog izbora opisuju se slučajnom varijablom koja ima istu raspodelu kao i obeležje X .

Teorijski, tj. pre izvlačenja članova populacije u uzorak, uzorak se može shvatiti kao n -torka (X_1, X_2, \dots, X_n) , pri čemu su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne slučajne varijable sa istom raspodelom kao i obeležje X . Ova n -torka je jednostavni slučajni uzorak. Realizovane vrednosti uzorka (x_1, x_2, \dots, x_n) su konkretni brojevi i , prema tome, nisu slučajne varijable.

Jednostavno slučajno uzorkovanje (engl. *simple random sampling*) je postupak ili plan uzorkovanja u kojem svaki uzorak veličine n ima istu verovatnoću izbora. Jednostavno slučajno uzorkovanje se praktično izvodi tako što se od ukupnog broja od N jedinica populacije koje se nalaze u spisku ili listi članova populacije u svakom koraku bira po jedan član u uzorak. Pri tome se svakom članu populacije pruža jednaka šansa da bude uzet u uzorak. To se izvodi tako što se iz specijalno napravljenih tablica

slučajnih brojeva ili iz skupa slučajnih brojeva generisanih specijalnim računarskim programima uzimaju redom (horizontalno ili vertikalno) slučajni brojevi koji imaju isto onoliko cifara koliko ih ima i najveći redni broj u spisku članova populacije. Član populacije čiji redni broj u spisku je identičan slučajnom broju uzima se u tom koraku u uzorak. Ako se uzorkovanje vrši bez vraćanja član populacije koji je već uzet u uzorak u nekom od prethodnih koraka preskače se, tj. ne uzima se ponovo u uzorak. Kao rezultat jednostavnog slučajnog uzorkovanja dobija se jednostavni slučajni uzorak.

Ako se uzorak definiše kao neuređen skup koji se bira bez vraćanja, verovatnoća izbora svakog jednostavnog slučajnog uzorka veličine n iz populacije od N članova jednaka je $\frac{1}{\binom{N}{n}}$, jer je jednostavni slučajni uzorak u tom slučaju kombinacija sa n

elemenata od ukupno N elemenata populacije. Ako, pak, uzorak posmatramo kao uređeni skup, a uzorkovanje se vrši bez vraćanja, tada jednostavni slučajni uzorak predstavlja varijaciju bez ponavljanja sa n elemenata od ukupno N elemenata. Verovatnoća izbora za bilo koji jednostavni slučajni uzorak veličine (ili "obima") n iz populacije koja ima N članova jednaka je tada $\frac{1}{{}_n P_N}$, pri čemu je ${}_n P_N = \frac{N!}{(N-n)!}$, tj. broj varijacija bez ponavljanja sa po n elemenata od ukupno N elemenata. ¹⁹

Sistematsko uzorkovanje (engl. *systematic sampling*) je postupak uzorkovanja koji se najčešće koristi onda kada je populacija sastavljena od konačnog broja članova, kada je spisak članova populacije uređen slučajno, na raspolaganju je malo vremena a postoje vrlo ograničeni ljudski i računarski resursi za pravljenje uzorka. U ovom planu uzorkovanja samo se prvi član koji će ući u uzorak određuje korišćenjem tablica ili generatora slučajnih brojeva. To se izvodi tako što se odabere slučajni broj i koji je manji ili jednak k , pri čemu je k jednako ili celom broju ili najbližem celom broju koji se dobija zaokruživanjem broja koji se dobija deljenjem veličine populacije i veličine uzorka. Iz spiska članova populacije se zatim i -ti član uzima kao prvi član uzorka. Preostali članovi uzorka biraju se sa spiska tako što se uzima svaki k -ti član. Dakle, ako prvi entitet izabran u uzorak ima i -ti redni broj u spisku, drugi izabrani entitet se u spisku nalazi pod $(i + k)$ -tim rednim brojem, treći član uzorka ima redni broj jednak $(i + 2k)$, a redni broj poslednjeg n -tog člana uzorka jednak je $i + (n-1)k$. Uzorak koji je dobijen na ovaj način uobičajeno se naziva sistematskim uzorkom sa intervalom k . Sistematsko uzorkovanje nije opravdano koristiti ako je spisak članova populacije uređen tako da postoji izvesna "periodičnost" u spisku koja se poklapa sa intervalom biranja k . Na primer, ako bismo birali sistematski uzorak iz spiska bračnih parova u kojem je muž uvek na prvom mestu, moglo bi se desiti da u uzorak uzmemo samo muškarce ili samo žene.

¹⁹ Pojmovi kombinacije i varijacije prikazani su u Matematičkom pojmovniku u okviru odrednice **Osnovni pojmovi i pravila kombinatorike**.

Stratifikovano uzorkovanje (engl. *stratified sampling*) uobičajeno je pri uzimanju uzoraka iz vrlo heterogenih populacija, tj. populacija koje se prema nekom obeležju mogu podeliti na stratume, slojeve ili subpopulacije. Na primer, pri ispitivanju javnog mnjenja uobičajeno se vrši podela populacije prema regionalnoj i obrazovnoj strukturi, prema veličini mesta boravka, ekonomskom statusu i slično. Stratifikacija, tj. podela populacije na stratume vrši se prema obeležjima ili karakteristikama populacije za koje se može pretpostaviti da su povezane sa onom karakteristikom koja se ispituje. Ukoliko bismo, na primer, ispitivali stavove studenata prema abortusu, jedno od obeležja po kojem bismo svakako stratifikovali ciljnu populaciju bila bi polna pripadnost.

Stratifikovano uzorkovanje se izvodi tako što se, posle podele populacije na stratume, iz svakog stratuma, prema određenim pravilima (obično jednostavnim slučajnim uzorkovanjem) uzme određeni broj entiteta u uzorak. Pri određivanju udela uzoraka iz pojedinih stratuma u ukupnom uzorku vodi se računa o veličini i varijabilnosti pojedinih stratuma populacije, kao i o troškovima koji su potrebni za ispitivanje jedinica unutar pojedinih stratuma. Za određivanje udela pojedinih stratuma u ukupnom uzorku razvijeni su posebni principi i postupci za "alokaciju uzorka po stratumima" kojima se ovde nećemo baviti.

Višestapno uzorkovanje (engl. *multistage sampling*) izvodi se tako što se u prvom koraku (etapi) slučajnim uzorkovanjem izaberu određeni segmenti, delovi ili skupine populacije (npr. opštine ili mesta) a zatim se u narednim etapama biraju (takođe slučajno) sitnije jedinice uzorkovanja (npr. domaćinstva ili osobe). Zavisno od broja etapa u ovom procesu ovakvo uzorkovanje može biti dvoetapno, troetapno i tako dalje.

Klastersko uzorkovanje – uzorkovanje skupina (engl. *cluster sampling*) je plan uzorkovanja u kojem se ne vrši uzorkovanje pojedinačnih jedinica posmatranja već čitavih grupa ili klastera entiteta. Na primer, u ispitivanjima srednjoškolske omladine u jednoj zemlji moguće je uzorak ispitanika napraviti tako što se slučajnim uzorkovanjem izabere uzorak škola, a zatim se ispituju svi učenici onih škola koje su ušle u uzorak. Klastersko uzorkovanje pogodno je u slučajevima kada nemamo listu svih članova populacije ali postoji spisak svih klastera ili skupina koji nam može poslužiti za uzorkovanje. Ovaj postupak uzorkovanja valjan je samo onda kada je izvesno da svaki član populacije može pripadati jednom i samo jednom klasteru ili skupini.

Uzorkovanje sa nejednakom verovatnoćom uključivanja u uzorak (engl. *sampling with varying probabilities*) vrši se tako što se članovi populacije uzimaju u uzorak srazmerno njihovoj veličini ili nekoj drugoj karakteristici. Na primer, izbor opština u prvoj fazi višestapnog uzorkovanja može se izvesti tako da verovatnoća izbora u uzorak za svaku opštinu bude srazmerna njenoj veličini.

Višefazno uzorkovanje (engl. *multi-phase sampling*) se odvija tako što se određene informacije prikupljaju na celom početnom uzorku, a zatim se iz ovog početnog uzorka uzimaju poduzorci za dodatna ispitivanja. Na primer, u ispitivanju inteligencije na nacionalnom novou, celokupnom nacionalnom uzorku može se zadati grupni test inteligencije a zatim se, na mnogo manjem poduzorku izabranom prema određenim principima iz nacionalnog uzorka, mogu zadati individualni testovi inteligencije i dodatni upitnici.

Važno je uočiti bitnu razliku između višestapnog i višefaznog uzorkovanja: dok se u postupku višestapnog uzorkovanja prave uzorci različitih tipova jedinica uzorkovanja (npr. u prvoj etapi uzorak opština, a u drugoj uzorak domaćinstava), dotle se u višefaznom uzorkovanju iste jedinice uzimaju u uzorak u svim fazama uzorkovanja.

Neprobabilističko uzorkovanje (engl. *nonprobabilistic sampling*) se ne zasniva na principima teorije verovatnoće. Stoga pri ovakvom uzorkovanju nije moguće u načelu odrediti za svakog člana populacije verovatnoću uzimanja u uzorak. Tipični primeri takvih planova uzorkovanja su: **kvotno** (engl. *quota sampling*) – uzorkovanje pri kojem se namerno nastoji da uzorak sastavom preslika proporciju određenih slojeva u populaciji; **namerno** (engl. *purposive sampling*) - uzorkovanje pri kojem se namerno u uzorak biraju samo određeni članovi populacije prema eksplicitnim kriterijumima; **pristrasno** (engl. *biased sampling*); **lančano ili uzorkovanje po principu "snežnih grudvi"** (engl. *snowball sampling*) – uzorkovanje u kojem ispitanici koji su prvi uzeti u uzorak regrutuju nove ispitanike a ovi dalje nove ispitanike i tako redom; **prigodno ili uzorkovanje "s ruke"** (engl. *opportunistic, convenient sampling* ili *accidental sampling*) itd.

Primeri uzoraka koji se dobijaju ovakvim postupcima uzorkovanja su: "telefonski" uzorak (pristrasni), izbor polaznika u vojne i policijske škole (namerni uzorak), studenti koji slušaju nastavu iz nekog predmeta (prigodni uzorak), slučajni prolaznici (uzorak uzet "s ruke") i slično.

Zapamtite:

- **Reprezentativni uzorak** je deo populacije koji poseduje sve bitne osobine populacije. Da bi se obezbedila reprezentativnost uzorka pri njegovom izboru treba poštovati sledeće principe:
 - ✓ svaki član populacije ima jednaku mogućnost da bude izabran – mora postojati tačan registar svih članova populacije;
 - ✓ izbor jedinica populacije u uzorak ne sme biti pristrasan, tj. ne sme zavisiti od volje ili želje istraživača;
 - ✓ uzorak ne sme biti suviše mali, tj. treba da sadrži barem oko 100 jedinica.
- Jedan konkretni slučajni ili probabilistički uzorak može, igrom slučaja, biti sasvim nereprezentativan za populaciju iz koje je izabran. Ipak, verovatnoća da se izvuče baš takav uzorak slučajnim uzorkovanjem veoma je mala.
- Zaključivanje o karakteristikama populacije u istraživanjima sa prebrojavanjem uz primenu statističke teorije na osnovu rezultata dobijenih na uzorcima nije smisleno ako je u biranju uzorka korišćeno **neprobabilističko uzorkovanje**.
- Zaključivanje o procesu koji je generisao podatke u analitičkim istraživanjima uz primenu statističke teorije smisleno je jedino ako podaci na osnovu kojih zaključujemo o tom procesu dobro reprezentuju ključne aspekte tog procesa. Reprezentativnost podataka za populaciju o kojoj zaključujemo kod istraživanja sa prebrojavanjem obezbeđuje se probabilističkim uzorkovanjem.
- Na neprobabilističkim uzorcima u istraživanjima sa prebrojavanjem smisleno je upotrebiti deskriptivne statističke metode, tj. metode pomoću kojih se pojedinačni rezultati svih entiteta iz uzorka sažeto numerički ili grafički prikazuju. Ovakvi uzorci mogu se koristiti i u eksploratornim, tj. probnim ispitivanjima

Premda je osnovna logika ista, statističko zaključivanje se ne zasniva na identičnim matematičkim formulama za sve vrste probabilističkih uzoraka. Mi ćemo, iz didaktičkih razloga, u nastavku teksta u ovoj knjizi pretpostaviti da su podaci na osnovu kojih izvodimo statističko zaključivanje dobijeni na jednostavnom slučajnom uzorku i to, najčešće, iz beskonačne populacije. Ukoliko je slučajni uzorak dobijen nekim od drugih planova probabilističkog uzorkovanja, radi izvođenja postupaka statističkog zaključivanja potrebno je oslanjati se na matematičke formule koje su podešene datom tipu uzorkovanja. Ove formule moguće je naći u statističkim knjigama koje se specifično bave teorijom i praksom uzorkovanja (na primer, Cochran, 1977, Sukhatme, Sukhatme, Sukhatme, & Asok, 1984, Som, 1995, Dorofeev & Grant, 2006).

Za statističku analizu podataka dobijenih na probabilističkim uzorcima koji nisu dobijeni jednostavnim slučajnim uzorkovanjem u programu SPSS koriste se procedure u okviru modula **Complex samples**. Obrada podataka u okviru ovog modula podrazumeva da je plan uzorkovanja definisan pre obrade i sačuvan u fajlu odgovarajućeg formata.

Distribucija uzorkovanja

Distribucija varijable na uzorku, ili, *distribucija uzorka* (engl. *sample distribution*), predstavlja *empirijski dobijenu* raspodelu koja obuhvata parove koje čine vrednosti varijable i tim vrednostima pridružene učestalosti njihovog pojavljivanja na određenom uzorku. Na primer, ako bismo na osnovu slučajnog uzorka iz populacije punoletnih stanovnika neke zemlje napravili distribuciju učestalosti pojedinih kategorija bračnog statusa, onda bi ova distribucija predstavljala distribuciju uzorka za varijablu bračni status. Dakle, distribucija uzorka prikazuje „ponašanje“ neke varijable na jednom konkretnom uzorku. U procesu statističkog zaključivanja ovo je najčešće jedina distribucija sa kojom realno raspolazemo.

Distribucija uzorkovanja ili *uzoračka distribucija* (engl. *sampling distribution*) je distribucija koja opisuje „ponašanje“ određenog statistika, tj. statističke mere uzorka (na primer, aritmetičke sredine, medijane, interkvartilnog odstupanja, kvantila uzorka, proporcije određene kategorije) u određenim uslovima. Ova distribucija sadrži moguće vrednosti koje dati statistik može uzeti na slučajnim uzorcima iste veličine i učestalosti (tačnije verovatnoće) pridružene tim vrednostima. U principu distribucija uzorkovanja je teorijska distribucija do koje najčešće dolazimo matematičkim izvođenjima. U slučaju kada distribuciju uzorkovanja nije moguće izvesti matematičkim putem, do aproksimacije ove distribucije može se doći i određenim postupcima preuzorkovanja (engl. *resampling*), o čemu će biti reči u nastavku teksta. Radi sticanja početne predstave o distribuciji uzorkovanja zamislimo ovakvu situaciju: iz određene populacije ili procesa mogli bismo birati slučajne uzorke veličine 100 i za svaki od tih uzoraka izračunavati aritmetičku sredinu na varijabli inteligencija. Ukoliko ovaj postupak ponavljamo veoma veliki broj

puta (zapravo teorijski posmatrano beskonačan broj puta) dobili bismo ogroman broj aritmetičkih sredina slučajnih uzoraka. Ako bismo potom napravili distribuciju učestalosti, ali ne pojedinačnih mera inteligencije, već aritmetičkih sredina ogromnog broja slučajnih uzoraka iste veličine dobili bismo nešto što je nalik distribuciji uzorkovanja aritmetičke sredine. Pravu distribuciju uzorkovanja za aritmetičku sredinu kao statistik dobijamo matematičkim izvođenjem uz određene pretpostavke. Pod određenim uslovima, koje ćemo pojasniti na odgovarajućem mestu u nastavku teksta u ovoj glavi, distribucija uzorkovanja za aritmetičku sredinu odgovara normalnoj funkciji gustine. Bitno je uočiti da se distribucija uzorkovanja određenog statistika izvodi pod određenim jasno definisanim uslovima. Stoga jedan isti statistik može u različito definisanim uslovima imati različite distribucije uzorkovanja. ***Izvođenje distribucije uzorkovanja za određeni statistik zasniva se u osnovi na tretiranju tog statistika kao slučajne varijable.***

Dakle, u statističkom zaključivanju figuriraju tri vrste distribucija: distribucija populacije, distribucija uzorka i distribucija uzorkovanja. Distribucija populacije i distribucija uzorkovanja u principu su teorijske, matematički definisane distribucije, dok se distribucija uzorka dobija empirijski tokom procesa istraživanja. Veoma je važno razlikovati distribuciju populacije i distribuciju uzorkovanja: premda obe vrste distribucija mogu imati isti opšti matematički izraz (na primer, obe mogu predstavljati funkcije gustine koje pripadaju familiji normalnih funkcija gustine) reč je o značenjski različitim raspodelama. Distribucija populacije predstavlja raspodelu mogućih *vrednosti neke varijable* u populaciji ili u nekom procesu a distribucija uzorkovanja predstavlja raspodelu *vrednosti nekog statistika* na beskonačnom broju uzoraka iste veličine iz određene populacije.

Naravno, između triju pomenutih vrsta distribucija postoje određene veze: i distribucija uzorkovanja (uzoračka distribucija) i distribucija uzorka zavise na određeni način od distribucije populacije.

Distribucija uzorkovanja statistika kao slučajne varijable

Izvođenje distribucije uzorkovanja statistika zasniva se na teoriji slučajnih varijabli iz teorije verovatnoće. U Glavi III definisali smo apstraktni matematički pojam koji je neobično važan za razumevanje statističkog zaključivanja, pojam *slučajne varijable*. Tom prilikom kao ključna određenja slučajne varijable istakli smo sledeća:

- Može *na slučaj* uzimati neku od svojih mogućih vrednosti;
- Verovatnoće da varijabla uzima svoje vrednosti mogu se odrediti tako da zbir verovatnoća za sve vrednosti koje slučajna varijabla može uzeti bude jednak 1;
- Može biti diskretna ili kontinuirana. „Ponašanje“ diskretnih slučajnih varijabli matematički opisujemo distribucijom verovatnoća koju čine parovi sastavljeni od mogućih vrednosti varijable i svakoj vrednosti pridružene verovatnoće. „Ponašanje“ kontinuiranih slučajnih varijabli matematički opisujemo funkcijama gustine kojima su definisane verovatnoće da slučajna varijabla uzme vrednosti u određenom intervalu.

Pri definisanju slučajne varijable istakli smo da je reč o apstraktnom matematičkom pojmu koji se može primeniti radi matematičkog opisa „ponašanja“ mnogih entiteta koji su proizvod delovanja slučajnih faktora. Pojam slučajne varijable možemo primeniti i na statistike koje koristimo kako bismo na osnovu podataka dobijenih na slučajnom uzorku izvodili statističko zaključivanje. U nastavku teksta ćemo ukratko obrazložiti osnovnu

logiku koju sledimo u tretiranju statistika kao slučajnih varijabli. Pri tome, ćemo, iz didaktičkih razloga, pretpostaviti da smo uzorak dobili jednostavnim slučajnim uzorkovanjem.

Na osnovu rezultata merenja neke varijable na jednostavnom **slučajnom** uzorku veličine n (u oznaci X_1, X_2, \dots, X_n) iz određene populacije ili procesa možemo izračunati statističku meru uzorka, **statistik**. Dati **statistik** nam može poslužiti kao **ocenitelj** parametra. Statistik koji služi kao ocenitelj parametra je, matematički posmatrano, funkcija definisana na uzorku: $G = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ali, kao što smo već napomenuli u delu teksta o uzorkovanju, pre nego što izvedemo istraživanje i izračunamo vrednost statistika na osnovu određene realizacije jednostavnog slučajnog uzorka (x_1, x_2, \dots, x_n) , svaka opservacija X_1, X_2, \dots, X_n se teorijski posmatra kao **slučajna varijabla koja ima istu raspodelu kao i slučajna varijabla X** čije parametre treba da ocenimo. Budući da pretpostavljamo da je reč o prostom slučajnom uzorku, slučajne varijable (tj. opservacije) X_1, X_2, \dots, X_n su nezavisne. Kako je statistik G funkcija ovih slučajnih varijabli onda je i on **slučajna varijabla**. Distribucija verovatnoća ili funkcija gustine statistika (ocenitelja) je distribucija uzorkovanja. **Distribucija uzorkovanja pokazuje funkcionalnu vezu mogućih vrednosti statistika i verovatnoće (ili gustine verovatnoće) koja odgovara datoj vrednosti (ili intervalu vrednosti) statistika za sve moguće uzorke određene veličine iz date populacije ili procesa.** Budući da je statistik slučajna varijabla i da ima određenu distribuciju, moguće je odrediti i očekivanu vrednost i varijansu statistika na isti način kao i za sve slučajne varijable. **Standardna devijacija distribucije uzorkovanja nekog statistika je standardna greška tog statistika.**

Radi sticanja jasnije predstave o distribuciji uzorkovanja za neki statistik uzmimo jedan vrlo jednostavan i stoga nerealan primer. Zamislimo da populacija sadrži samo 5 entiteta i da iz te populacije uzimamo slučajne uzorke veličine 2 (pretpostavimo, jednostavnosti radi, da smo uzorkovanje vršili bez vraćanja).

U pogledu neke osobine entiteta iz zamišljene populacije imaju sledeće mere:

Populacija	Mere entiteta na varijabli
Entitet A	14
Entitet B	15
Entitet C	15
Entitet D	14
Entitet E	12

Distribucija ove osobine u populaciji izgledala bi ovako:

Mere na varijabli (X_k)	Učestalosti (f_k)	Relativne učestalosti (verovatnoće) (p_k)
15	2	0.4
14	2	0.4
12	1	0.2
Ukupno	5	1

Aritmetička sredina, ili očekivana vrednost kao jedan mogući parametar ove populacije je 14. (Prema obrascu za očekivanu vrednost iz Glave III sledi: $15 \cdot 0.4 + 14 \cdot 0.4 + 12 \cdot 0.2 = 14$). Standardna devijacija (prema obrascu iz Glave III) iznosi 1.10.

Budući da u populaciji ima 5 entiteta i da biramo slučajne uzorke bez vraćanja, broj mogućih uzoraka veličine 2 predstavlja kombinaciju od po 2 člana od ukupno 5 članova. Dakle, u ovom slučaju imali bismo 10 mogućih uzoraka:

AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE i DE.

Aritmetičke sredine mogućih uzoraka prikazane su u narednoj tabeli:

Uzorak	Aritmetička sredina
AB	14.5
AC	14.5
AD	14
AE	13
BC	15
BD	14.5
BE	13.5
CD	14.5
CE	13.5
DE	13

Uočimo kako aritmetičke sredine uzoraka variraju manje ili više oko aritmetičke sredine populacije: neke su veće a neke manje od parametra, tj. aritmetičke sredine populacije, dok je aritmetička sredina uzorka AD jednaka aritmetičkoj sredini populacije.

Distribucija uzorkovanja aritmetičke sredine kao ocenitelja parametra, tj. aritmetičke sredine populacije izgledala bi ovako:

Mere na varijabli (X_k)	Učestalosti (f_k)	Relativne učestalosti (verovatnoće) (p_k)
15	1	0.1
14.5	4	0.4
14	1	0.1
13.5	2	0.2
13	2	0.2
Ukupno	10	1

Aritmetička sredina ove distribucije uzorkovanja jednaka je 14, a standardna devijacija iznosi 0.67.

Za uzorke veće od 2 distribucija uzorkovanja sadržala bi manji broj različitih vrednosti, tj. bila bi “zgusnutija” oko parametra. Na primer, distribucija uzorkovanja za uzorak od 4 entiteta, koji bi bio približan veličini populacije, sadržala bi pet vrednosti za aritmetičke sredine uzoraka: 14.5 (za uzorak ABCD), 13.75 (za uzorak ABDE), 13.75 (za uzorak ACDE), 14 (za uzorak BCDE) i 14 (za uzorak ABCE). U skupu ovih pet vrednosti samo su tri različite!

Distribucija uzorkovanja za aritmetičku sredinu izgledala bi sada ovako:

Aritmetičke sredine	Učestalosti (f)	Relativne učestalosti

(M)		(verovatnoće) (p)
14.5	1	0.2
14.0	2	0.4
13.75	2	0.4
Ukupno	5	1

Aritmetička sredina ove distribucije uzorkovanja je 14, a standardna devijacija iznosi 0.28. Isto tako, za uzorak veličine 5, tj. za uzorak koji je jednak populaciji, “distribucija uzorkovanja” aritmetičke sredine svela bi se na jedan broj, tj. na aritmetičku sredinu populacije. Dakle, standardna devijacija distribucije uzorkovanja bi u ovom slučaju bila jednaka 0. Uočimo, uzgred, da bi za uzorke veličine 1 distribucija uzorkovanja aritmetičke sredine bila identična distribuciji populacije.

Prethodni primer treba da posluži samo za sticanje početne predstave o distribuciji uzorkovanja. Iz ovog jednostavnog primera treba uočiti nekoliko pojedinosti koje će biti od velikog značaja za razumevanje pojma distribucije uzorkovanja ali i statističkog zaključivanja uopšte:

- *Distribucija populacije i distribucija uzorkovanja su različite distribucije*, osim u praktično nebitnom slučaju kada je uzorak veličine 1;
- *Što je uzorak veći to je distribucija uzorkovanja manje varijabilna*, tj. “zbijenija”. Uočimo da se sa povećanjem uzorka sa 2 na 4 standardna devijacija distribucije uzorkovanja smanjila sa 0.67 na 0.28;
- *Aritmetičke sredine svih distribucija uzorkovanja za aritmetičku sredinu jednake su parametru, tj. aritmetičkoj sredini populacije*. Da li je ovo slučajna koincidencija u datom primeru? Nije! To važi uvek kada je reč o aritmetičkoj sredini kao statistiku kojim ocenjujemo parametar. (Ova osobina aritmetičke sredine kao ocenitelja zove se nepristrasnost i o tome će biti detaljnije reči u Glavi **IX**). Ovo pravilo, međutim, ne važi za sve statistike kojim ocenjujemo parametre već samo za tzv. nepristrasne ocenitelje u kakve spada aritmetička sredina.

Distribucije uzorkovanja u prikazanom primeru odgovaraju distribucijama verovatnoća za diskretne slučajne varijable koje smo objasnili u Glavi **III**. U realnoj situaciji primene statistike, konačne populacije su daleko veće od one koja je korišćena u prikazanom primeru ili je reč o beskonačnim populacijama, te je broj mogućih uzoraka određene veličine iz takvih populacija ogroman ili beskonačan. Dakle, u realnim situacijama istraživanja gotovo svi statistici se tretiraju kao kontinuirane slučajne varijable, dakle kao varijable koje na slučaj mogu uzeti neprebrojivo beskonačan broj vrednosti u nekom intervalu mogućih vrednosti na varijabli kojom se bavimo. Prema tome, distribucije uzorkovanja najvećeg broja statistika koje koristimo u statističkom zaključivanju odgovaraju funkcijama gustine za kontinuirane slučajne varijable koje smo objasnili u Glavi **III**. U Glavi **III** prikazali smo familije binomnih i normalnih raspodela. Ove raspodele se često koriste kao matematički modeli distribucija uzorkovanja u statističkom zaključivanju. Binomna raspodela se koristi kao distribucija uzorkovanja za statistike koji se mogu tretirati kao diskretne slučajne varijable u situacijama kada sadržinska varijabla kojom se bavimo može uzeti samo dve vrednosti (na primer: pol /muški-ženski/, tačnost odgovora /tačno-netačno/, oboljevanje od depresije /oboleo-nije oboleo). Jedan od najčešće korišćenih matematičkih modela za distribucije uzorkovanja mnogih statistika jeste familija normalnih funkcija gustine koju smo takođe objasnili u Glavi **III**. Normalna

funkcija gustine koristi se kao model distribucije uzorkovanja za aritmetičku sredinu zahvaljujući sledećoj matematičkoj teoremi:

Ako se varijabla X normalno raspodeljuje u populaciji sa parametrima μ i σ , tada je normalna raspodela sa parametrima μ i σ_M distribucija uzorkovanja za aritmetičku sredinu slučajnog uzorka.

Centralna granična teorema

Šta se dešava sa distribucijom uzorkovanja za aritmetičku sredinu ako distribucija varijable X u populaciji nije normalna? Tada važi tzv. *centralna granična teorema*, jedna od teorema koje su od najvećeg značaja u statističkom zaključivanju. Centralna granična teorema ima mnoštvo formulacija a mi ćemo ovde dati onu koja nam se, s obzirom na namenu ove knjige, čini najprikladnijom (modifikovano prema Dinov, Christou, & Sanchez, 2008, str.2):

Ako je X_1, X_2, \dots, X_n slučajni uzorak iz distribucije sa jasno definisanom aritmetičkom sredinom (μ) i standardnom devijacijom σ , tada se sa povećanjem uzorka distribucija uzorkovanja aritmetičke sredine uzorka (M) približava normalnoj raspodeli sa parametrima μ i σ_M .

U svom apstraktnijem i matematički korektnijem obliku centralna granična teorema tvrdi da distribucija zbira nezavisnih i identično distribuiranih slučajnih varijabli iz procesa sa konačnom očekivanom vrednošću i varijansom teži normalnoj raspodeli kako se broj ovih varijabli povećava ka beskonačnosti. Budući da aritmetička sredina predstavlja zapravo zbir slučajnih varijabli podeljen sa brojem tih varijabli onda se teorema odnosi i na aritmetičku sredinu.

Ono što je bitno uočiti u samoj formulaciji centralne granične teoreme jeste to da teorema samo tvrdi da se *sa povećanjem* uzorka distribucija uzorkovanja *približava* normalnoj raspodeli. Ni brzina ovog približavanja, niti eventualna tačka poklapanja (u smislu određene konačne veličine uzorka) distribucije uzorkovanja aritmetičke sredine sa normalnom raspodelom se ne specifikuju. Statistička istraživanja, međutim, pokazuju da se to približavanje distribucije uzorkovanja normalnoj raspodeli odvija relativno brzo tako da već za uzorke od 30 i veće od 30 možemo da “računamo” na primenu centralne granične teoreme. Istraživanja pokazuju da se ova teorema može koristiti i za neke druge statistike, s tim da je za njih brzina približavanja (konvergencije) distribucije uzorkovanja normalnoj raspodeli znatno manja nego što je to slučaj sa distribucijom uzorkovanja aritmetičke sredine.²⁰

Za razumevanje statističkog zaključivanja, pored binomne i normalne raspodele veoma su važne i neke druge distribucije slučajnih varijabli koje mogu poslužiti kao matematički modeli za distribucije uzorkovanja određenih statistika koje koristimo u statističkom zaključivanju. U nastavku ove glave prikazaćemo T (ili Studentovu) raspodelu hi-kvadrat raspodelu, i F (ili Snidikorovu) raspodelu jer se one najčešće koriste u primeni statistike u psihologiji i srodnim oblastima.. Dakle, reč je o matematičkim funkcijama gustine koje se vrlo često koriste u statističkom zaključivanju za opis “ponašanja”

²⁰ Na primer, da bi distribucija uzorkovanja proporcije p bila približno normalna potrebno je da i $n \cdot p$ bude barem 5 ali i $n \cdot (1-p)$ bude takođe barem 5, pri čemu je n veličina uzorka. Ako je proporcija jednaka 0.05 onda je za približavanje njene distribucije uzorkovanja normalnoj potrebno barem 100 ispitanika.

određenih statistika, a dve funkcije gustine (hi-kvadrat i T-funkciju) ćemo koristiti u narednim glavama knjige. Bez obzira na njihov dosta komplikovan matematički izraz, čitalac treba da bude upoznat sa osnovnim svojstvima ovih distribucija kako bi mogao da razume i adekvatno primenjuje postupke statističkog zaključivanja. Ono što je pri tome bitno uočiti jesu parametri koji definišu svaku od tih distribucija i njihov vizuelni oblik. Kasnije, tokom proučavanja preostalih glava u knjizi, čitalac se može, kada god oseti potrebu za tim, vratiti na prikaz odgovarajuće distribucije koji je dat u ovoj glavi.

T ili Studentova raspodela

T-funkciju gustine definisao je W. Gosset, alias Student.²¹ Ova funkcija definisana je sledećom formulom:

$$f(t) = G(v) \left[1 + \frac{t^2}{v} \right]^{-(v+1)/2},$$

pri čemu je $G(v) = \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}$ konstanta za određeno v .

$\Gamma(p)$ je gama funkcija (Ojlerova funkcija druge vrste). Ono što je bitno uočiti u formuli za T-distribuciju jeste njen parametar, v , tj. broj stepeni slobode. Ovaj parametar je u primeni T-distribucije u statističkom zaključivanju u vezi sa veličinom uzorka I najčešće se u analizi konkretnih podataka označava kao df (od engleskog *degree of freedom*, u prevodu stepeni slobode). Najčešće se koristi u testiranju statističke značajnosti razlika između dveju aritmetičkih sredina, tj. statističke značajnosti t-statistika. Ova distribucija je simetrična, njena očekivana vrednost, tj. aritmetička sredina jednaka je 0 a varijansa $v / (v - 2)$. Iz izraza za varijansu, očigledno je da se sa povećanjem broja stepeni slobode varijansa T-distribucije približava jedinici. Samim tim, T-distribucija se približava standardizovanoj normalnoj raspodeli koju smo prikazali u Glavi III. Studentove raspodele za 2 i 5 stepeni slobode prikazane su na Slici 8.3 zajedno sa standardizovanim normalnom raspodelom.

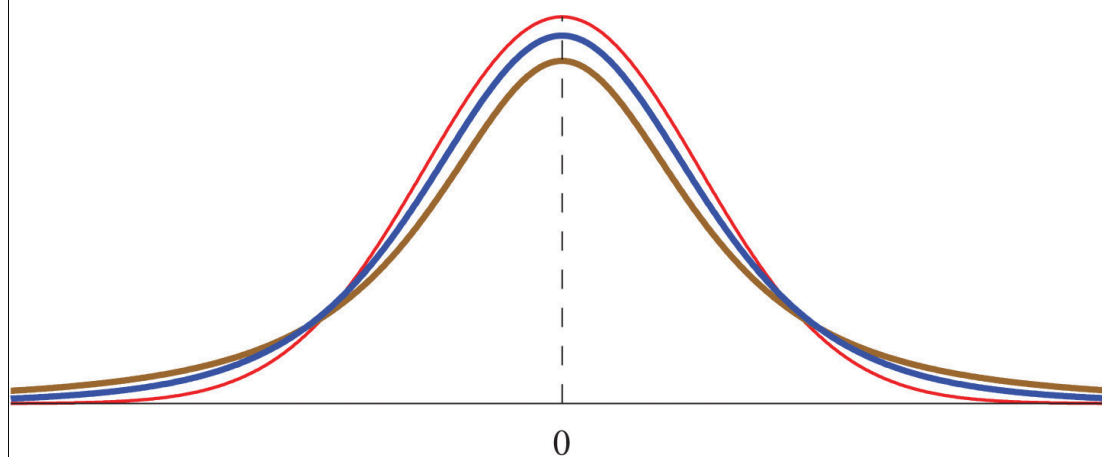
Slika 8.3 T-distribucije sa 2 (s najnižim vrhom) i 5 stepeni slobode (sa srednjim vrhom) i standardizovana normalna distribucija (sa najvišim vrhom).

²¹ Gosset je radio kao statističar početkom 20. veka u jednoj privatnoj pivari, i pošto zaposlenima nije bilo dozvoljeno da objavljuju svoje radove, Gosset je svoj rad o ovoj distribuciji objavio pod pseudonimom Student.

Standard normal

t -distribution with $df = 5$

t -distribution with $df = 2$



Hi-kvadrat raspodela

Hi-kvadrat funkcija definisana je sledećom formulom:

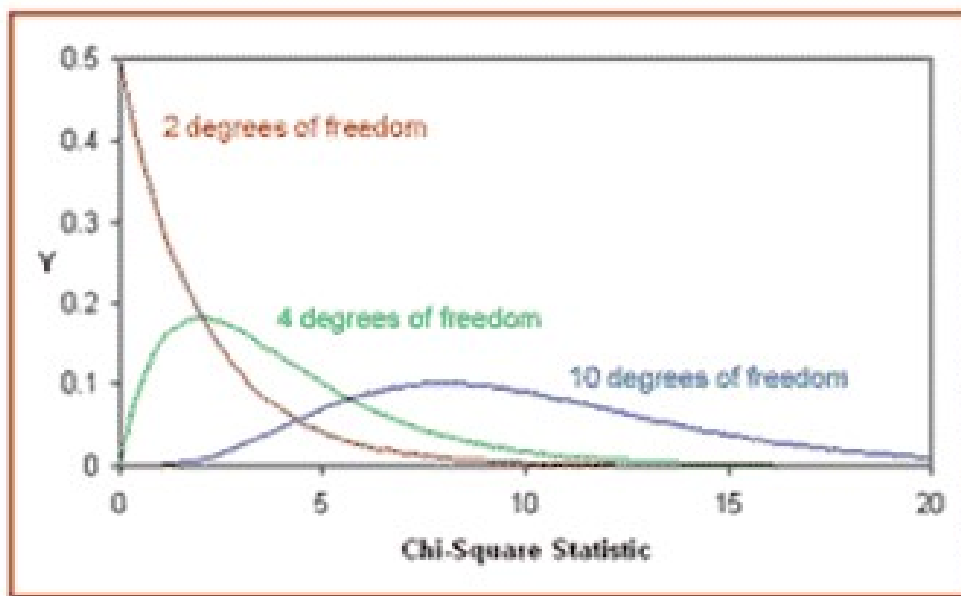
$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{v-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}.$$

Parametar hi-kvadrat funkcije gustine je takođe v , tj. stepeni slobode. Očekivana vrednost ili aritmetička sredina hi-kvadrat distribucije jednaka je v , a varijansa je jednaka $2v$. Ova distribucija se u statističkom zaključivanju najčešće sreće u analizama kategoričkih varijabli, tj. pri testiranju statističke značajnosti χ^2 ili H^2 statistika.²² Hi-kvadrat distribucija se može primeniti samo na statistike koji mogu uzeti vrednost 0 ili pozitivne vrednosti. Kao što se iz Slike 8.4 može videti, ova distribucija je pozitivno asimetrična i to utoliko više asimetrična ukoliko je parametar v manji.

Slika 8.4

Hi-kvadrat funkcija za 2, 4 i 10 stepeni slobode

²² Premda se ovaj statistik u statističkoj literaturi najčešće beleži grčkim slovom χ^2 , autor ove knjige preferira oznaku H^2 kako bi održao pravilo da se parametri beleže grčkim a statistici latiničkim slovima.



F ili Snidikorova raspodela

F-raspodela se najčešće koristi u analizi varijanse i regresionoj analizi, oblastima statistike koje nisu sadržane u ovoj knjizi.²³ Ona se uglavnom koristi za utvrđivanje statističke značajnosti F-statistika. Budući da će veliki broj korisnika ove knjige koristiti ove statističke postupke dajemo ovde i osnovne informacije o F-raspodeli.

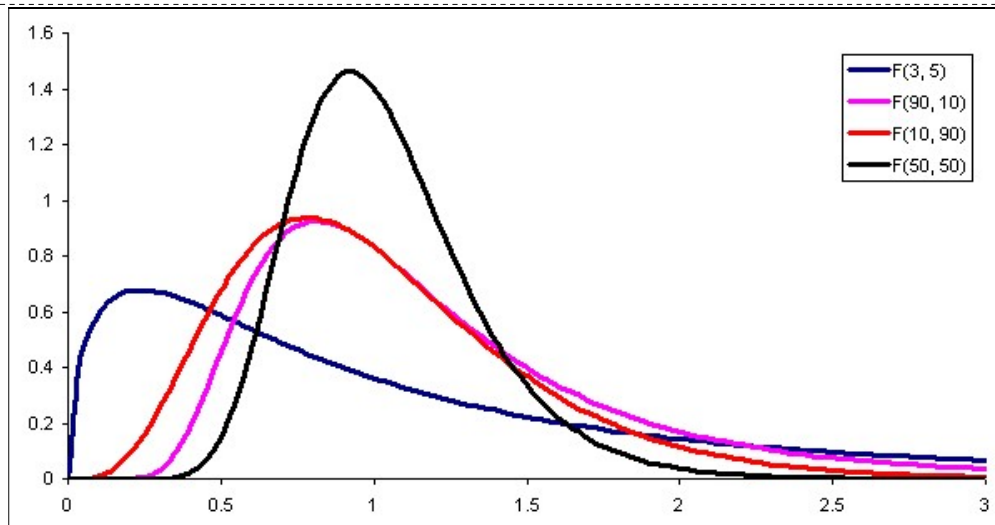
Snidikorovu funkciju gustine definisana je sledećim izrazom:

$$f(F) = \frac{v_1^{v_1/2} v_2^{v_2/2}}{B(v_1, v_2)} F^{v_1-1} (v_2 + v_1 F)^{-\frac{(v_1+v_2)}{2}}$$

Pri čemu je B beta funkcija a v_1 i v_2 parametri ove distribucije. Dakle, ova funkcija gustine definisana je dvema vrstama stepeni slobode. Očekivana vrednost, tj. aritmetička sredina ove raspodele jednaka je $v_2 / (v_2 - 2)$ a varijansa je jednaka $\frac{2 v_2^2 (v_1 + v_2 - 2)}{v_1 (v_2 - 2)^2 (v_2 - 4)}$.

Kako se iz Slike 8.5. može videti F-raspodela je pozitivno asimetrična i to utoliko više ukoliko su oba parametra ove raspodele manja.

²³ Ovi postupci prtikazani su podrobno u Tenjović, 2020.



F-raspodela je u zanimljivoj vezi sa T-raspodelom:
 Ako statistik t ima T -funkciju gustine sa v stepeni slobode, onda statistic t^2 ima F -funkciju gustine sa $v_1 = 1$ i $v_2 = v$ stepeni slobode

Reference

Cochran, W. G. (1977). *Sampling techniques*. New York: John Wiley.

Deming WE (1975). "On Probability as a Basis for Action." *The American Statistician*, 29(4), 146–152. doi:10.1080/00031305.1975.10477402.

Dinov, I. D., Christou, N., & Sanchez, J. (2008). Central Limit Theorem: New SOCR Applet and Demonstration Activity. *Journal of Statistics Education*, 16(2). www.amstat.org/publications/jse/v16n2/dinov.html

Dorofeev, S., & Grant, P. (2006). *Statistics for Real-Life Sample Surveys, Non-Simple-Random Samples and Weighted Data*. Cambridge: Cambridge University Press.

Fisher, R. (1955). Statistical methods and Scientific Induction. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 17, 69–78.

Kass, R. E. (2011). Statistical Inference: The Big Picture. *Statistical Science*, 26(1), 1–9.

Lu, Y., & Henning, K. S. S. (2012). Are statisticians cold-blooded bosses? a new perspective on the 'old' concept of statistical population. *Teaching Statistics*, 35(1), 66–71.

Morris, P., Fritz, C., Smith, G., Cherchar, A., Crocket, R., ..., & Atkinson, L. (2015). In defence of statistical inference. *The Psychologist*, 28(5), 338–339.

Neyman, J. (1956). Note on an Article by Sir Ronald Fisher. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 18, 288–294.

Pearson, E. S. (1955). Statistical Concepts in the Relation to Reality. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 17, 204–207.

Sohn, D. (1991). Knowledge in psychological science: that of proces or of population. *The Journal of psychology*, 126(1), 5–16.

Som, R. K. (1995). Practical sampling techniques, Second edition, revised and expanded. New York, NY: MARCEL DEKKER, INC.

Sukhatme, P. V., Sukhatme, B. V., Sukhatme, S., & Asok, C. (1984). *Sampling surveys with applications (3rd ed.)*. Ames, IA: Iowa State University Press.

Trafimow, D., & Marks, M. (2015) Editorial. *Basic and Applied Social Psychology*, 37(1), 1–2. DOI: 10.1080/01973533.2015.1012991

Copyright Lazar Tenjović, 2023.