

STATISTIKA U PSIHOLOGIJI 2

**STATISTIČKI OBRASCI KOJE STUDENTI TREBA DA
ZNAJU**

(1) Osnovne oznake

1. Operator sabiranja ili sumacioni operator, u oznaci Σ :

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 \cdots x_n$$

2. Operator proizvoda, u oznaci Π :

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 * x_2 * \cdots * x_n$$

*Napomena: Znak *, ako nije posebno drugačije naznačeno, u ovom tekstu predstavlja oznaku množenja.*

(2) Deskriptivna statistika

3. Relativna frekvencija za vrednost k ili kategoriju k neke varijable, u oznaci p_k :

$$p_k = \frac{f_k}{n}$$

U ovom obrascu f_k je frekvencija ili učestalost za vrednost k ili kategoriju k određene varijable, a n je veličina uzorka.

4. Relativna frekvencija u procentima za vrednost k ili kategoriju k varijable, u oznaci P_k

$$P_k = \frac{f_k}{n} * 100$$

5. Aritmetička sredina uzorka, u oznaci M ,

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$x_i, i = 1, \dots, n$ predstavlja sirovi, izvorni rezultat jedinice posmatranja e_i .

6. Medijana

Iz sortiranih n vrednosti na varijabli, tj. n sirovih mera uređenih po veličini, mesto na kojem je medijana određuje se po obrascu:

$$\frac{n+1}{2}$$

7. Raspon, u oznaci R :

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

pri čemu je x_{\max} najveći, a x_{\min} najmanji rezultat, tj.

$$x_{\min} = \min_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{\max} = \max_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

8. Interkvartilni raspon, u oznaci IQR :

$$IQR = P_{75} - P_{25}$$

pri čemu je P_{75} percentil 75, a P_{25} je percentil 25.

9. Varijansa uzorka, u oznaci S^2 :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^2}{n-1}$$

10. Standardna devijacija uzorka, u oznaci S :

$$S = + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^2}{n-1}}$$

(oznaka $+$ ispred korena znači da se uzima samo pozitivni kvadratni koren iz potkorene veličine)

(3) Linearne transformacije

11. Ako je $t = a + b \cdot x$, tada je:

$$M_t = a + b \cdot M$$

$$S_t = b \cdot S$$

U ovim jednačinama a je aditivna, a b multiplikativna konstanta u linearnoj transformaciji. M i S predstavljaju aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju izvornih rezultata, a M_t i S_t označavaju aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju rezultata koji su iz izvornih dobijeni linearnom transformacijom.

12. Standardni ili standardizovani skor (z-skor) iz sirovog rezultata, u oznaci z_i :

$$z_i = \frac{x_i - M}{S}$$

13. Sirovi, izvorni, netransformisani rezultat na osnovu standardnog skora, u oznaci x_i :

$$x_i = M + z_i \cdot S$$

(4) Kovarijansa i linearna korelacija

14. Kovarijansa uzorka, u oznaci S_{XY} :

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M_X)(y_i - M_Y)}{n-1}$$

15. Brave-Pirsonov koeficijent linearne korelacije uzorka, u oznaci r_{XY} :

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

pri čemu je S_{XY} kovarijansa uzorka, a S_X i S_Y standardne devijacije uzorka na varijablama X i Y, tim redom.

(5) Verovatnoća

16. Verovatnoća događaja A, u oznaci $P(A)$:

$$P(A) = \frac{f_A}{n}$$

pri čemu je f_A broj ishoda obuhvaćenih događajem A, a n ukupan broj ishoda.

17. Uslovna verovatnoća događaja A, pod uslovom da se desio događaj B, u oznaci $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

18. Statistička nezavisnost događaja A i B:

Događaji A i B su statistički nezavisni, ako je

$$P(A|B) = P(A)$$

tj.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

(6) Ocenjivanje parametara

19. Standardna greška za aritmetičku sredinu, u oznaci σ_M :

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

pri čemu je σ standardna devijacija populacije a n veličina uzorka.

20. Ocena standardne greške za aritmetičku sredinu, u oznaci SE_M :

$$SE_M = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

pri čemu je S standardna devijacija uzorka a n veličina uzorka.

21. Interval poverenja za aritmetičku sredinu, u oznaci $100(1 - \alpha)\%$ CI (engl. Confidence Interval):

$$100(1 - \alpha)\% \text{ CI: } M - t_{1-\alpha/2} * SE_M \leq \mu \leq M + t_{1-\alpha/2} * SE_M$$

pri čemu je μ parametar, tj. aritmetička sredina populacije, M aritmetička sredina uzorka, SE_M ocena standardne greške za aritmetičku sredinu, $t_{1-\alpha/2}$ vrednost kvantila $1 - \alpha/2$ iz Studentove raspodele sa $n - 1$ stepeni slobode, a α odabrani nivo rizika greške tipa I. Ako je odabrani nivo rizika greške tipa I jednak 0.05 onda se pravi 95% interval poverenja, ako je odabrani nivo rizika greške tipa I jednak 0.01 pravi se 99% interval poverenja i slično.

22. Margina greške za $100(1 - \alpha)\%$ interval poverenja za aritmetičku sredinu, u oznaci ME (engl. Margin of Error):

$$ME = t_{1-\alpha/2} * SE_M$$

(7) t-test

23. t-statistik za jedan uzorak:

$$t = \frac{M - \mu_0}{SE_M}; \quad df = n - 1$$

pri čemu je M aritmetička sredina uzorka, μ_0 pretpostavljena vrednost aritmetičke sredine populacije, SE_M ocena standardne greške za aritmetičku sredinu, a df stepeni slobode.

24. t-statistik za dva nezavisna uzorka:

$$t = \frac{M_1 - M_2}{SE_{M_1 - M_2}}; \quad df = n_1 + n_2 - 2$$

pri čemu su M_1 i M_2 aritmetičke sredine uzorka, $SE_{M_1-M_2}$ ocena standardne greške za razliku između aritmetičkih sredina, a df stepeni slobode.

25. t- statistik za dva zavisna uzorka (metoda diferencija):

$$t = \frac{M_D}{SE_D}; \quad df = n - 1$$

pri čemu je M_D aritmetička sredina diferencija (razlika između sparenih rezultata), SE_D standardna greška za aritmetičku sredinu diferencija, a n broj diferencija, tj. broj parova rezultata.

26. Intervali poverenja za razliku između aritmetičkih sredina

- ❖ za razliku između aritmetičke sredine uzorka i pretpostavljene vrednosti aritmetičke sredine populacije:

$$100(1 - \alpha)\% \text{ CI: } (M - \mu_0) \pm ME$$

pri čemu je α odabrani nivo rizika greške, a ME margina greške: $ME = t_{(1-\alpha/2)} * SE_M$, $t_{(1-\alpha/2)}$ predstavlja kvantil $1-\alpha/2$ iz Studentove raspodele sa $n-1$ stepeni slobode, a SE_M je ocena standardne greške za aritmetičku sredinu.

- ❖ za razliku između dveju aritmetičkih sredina ako su uzorci nezavisni:

$$100(1 - \alpha)\% \text{ CI: } (M_1 - M_2) \pm ME$$

pri čemu je $ME = t_{(1-\alpha/2)} * SE_{M_1-M_2}$, $t_{(1-\alpha/2)}$ predstavlja kvantil $1-\alpha/2$ iz Studentove raspodele sa $n_1 + n_2 - 2$ stepeni slobode, a $SE_{M_1-M_2}$ je ocena standardne greške za razliku između aritmetičkih sredina.

- ❖ za aritmetičku sredinu diferencija (zavisni uzorci):

$$100(1 - \alpha)\% \text{ CI: } M_d \pm ME$$

pri čemu je $ME = t_{(1-\alpha/2)} * SE_{M_d}$, $t_{(1-\alpha/2)}$ predstavlja kvantil $1-\alpha/2$ iz Studentove raspodele sa $n - 1$ stepeni slobode, a SE_{M_d} je ocena standardne greške za aritmetičku sredinu diferencija.

(8) Analiza varijanse

Jednofaktorska analiza varijanse sa neponovljenim faktorom

27. Sume kvadrata odstupanja:

$$\sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - M)^2 = \sum_{k=1}^g n_k (M_k - M)^2 + \sum_{k=1}^g \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - M_k)^2$$

ili

$$SS_t = SS_b + SS_w$$

pri čemu je:

SS_t – suma kvadriranih odstupanja rezultata od aritmetičke sredine svih rezultata na kvantitativnoj varijabli;

SS_b – suma kvadriranih odstupanja aritmetičkih sredina pojedinih kategorija kategoričke varijable, tj. pojedinih grupa, od aritmetičke sredine svih rezultata na kvantitativnoj varijabli;

SS_w – suma kvadriranih odstupanja rezultata od aritmetičke sredine grupe kojoj rezultat pripada;

n_k -veličina uzorka k ili grupe k .

28. F-statistik za testiranje nulte hipoteze:

$$F = \frac{S_b^2}{S_w^2} \equiv \frac{MS_b}{MS_w}; \quad df_b = g - 1, \quad df_w = n - g$$

pri čemu je S_b^2 (MS_b) ocena varijanse (prosečni kvadrat) između grupa, tj. količnik sume kvadrata između grupa i broja stepeni slobode između grupa, a S_w^2 (MS_w) ocena varijanse (prosečni kvadrat) unutar grupa, tj. količnik sume kvadrata unutar grupa i broja stepeni slobode unutar grupa.

29. Kvadrirani Fišerov eta-koeficijent:

$$\eta^2 = \frac{SS_b}{SS_t} = 1 - \frac{SS_w}{SS_t}$$

Dvofaktorijalna analiza varijanse sa neponovljenim faktorima

30. Sume kvadrata odstupanja:

$$SS_t = SS_{br} + SS_{bk} + SS_{r \times k} + SS_{wc}$$

pri čemu je

SS_t – ukupna suma kvadriranih odstupanja;

SS_{br} – suma kvadriranih odstupanja između redova, tj. između nivoa faktora Q_1 ;

SS_{bk} – suma kvadriranih odstupanja između kolona, tj. između nivoa faktora Q_2 ;

$SS_{r \times k}$ – suma kvadriranih odstupanja za interakciju između dva faktora;

SS_{wc} – suma kvadriranih odstupanja unutar ćelija.

31. F-statistici za testiranje nultih hipoteza:

Za interakciju faktora

$$F = \frac{S_{r \times k}^2}{S_{wc}^2}; df_1 = (s-1)(g-1), df_2 = n - s * g$$

pri čemu je n ukupan broj rezultata, s broj nivoa faktora Q_1 , a g broj nivoa faktora Q_2 .

Za glavni efekat faktora Q_1

$$F = \frac{S_{br}^2}{S_{wc}^2}; df_1 = (s-1), df_2 = n - s * g$$

Za glavni efekat faktora Q_2

$$F = \frac{S_{bk}^2}{S_{wc}^2}; df_1 = (g - 1), df_2 = n - s * g$$

32. Kvadrirana eta za određeni efekat:

$$\eta^2 = \frac{SS_{effect}}{SS_t}$$

pri čemu je SS_{effect} suma kvadrata za efekat (za glavni efekat faktora ako se kvadrirana eta računa za taj efekat ili za interakciju faktora ako se kvadrirana eta računa za interakciju) a SS_t ukupna suma kvadrata na zavisnoj varijabli.

33. Parcijalna kvadrirana eta za određeni efekat, u oznaci η^2_p :

$$\eta_p^2 = \frac{SS_{effect}}{SS_{effect} + SS_{error}}$$

pri čemu je SS_{effect} suma kvadrata za efekat (za glavni efekat faktora ako se parcijalna kvadrirana eta računa za taj efekat ili za interakciju faktora ako se parcijalna kvadrirana eta računa za interakciju) a SS_{error} suma kvadrata za grešku.

Analiza varijanse sa jednim ponovljenim faktorom:

34. Razlaganje ukupnog varijabiliteta na zavisnoj varijabli

Ukupni varijabilitet na zavisnoj varijabli razlaže se na sledeći način:

$$SS_t = SS_s + SS_{ws} = SS_s + (SS_B + SS_{res})$$

Pri tome je:

SS_t – ukupni zbir kvadriranih odstupanja;

SS_s – zbir kvadriranih odstupanja između ispitanika ili subjekata (engl. between subjects);

SS_{ws} – zbir kvadriranih odstupanja unutar ispitanika ili subjekata (engl. within subjects);

SS_B – zbir kvadriranih odstupanja za efekat faktora, tj. zbir kvadriranih odstupanja unutar ispitanika koja su posledica delovanja ponovljenog faktora B;

SS_{res} – zbir rezidualnih kvadriranih odstupanja, tj. zbir kvadriranih odstupanja unutar ispitanika koja su posledica delovanja nesistematskih faktora, tj. eksperimentalnih grešaka;

35. F-statistik za glavni efekat ponovljenog faktora

$$F = \frac{S_B^2}{S_{res}^2}; \quad df_1 = (g - 1), \quad df_2 = (n - 1)(g - 1)$$

pri čemu je S_B^2 ocena varijanse (prosečni kvadrat) za efekat ponovljenog faktora B, a S_{res}^2 ocena varijanse za rezidualne, tj. grešku, g broj nivoa ponovljenog faktora a n ukupan broj ispitanika.

36. Parcijalna kvadrirana eta za efekat ponovljenog faktora

$$\eta_{pB}^2 = \frac{SS_B}{SS_B + SS_{res}} = \frac{SS_B}{SS_{ws}}$$

pri čemu je SS_B zbir kvadriranih odstupanja za efekat ponovljenog faktora, SS_{res} zbir rezidualnih kvadriranih odstupanja, a SS_{ws} zbir kvadriranih odstupanja unutar ispitanika.

Analiza varijanse sa jednim ponovljenim i jednim neponovljenim faktorom:

37. Razlaganje ukupnog varijabiliteta na zavisnoj varijabli

$$SS_t = SS_b + SS_w = (SS_A + SS_{swg}) + (SS_B + SS_{AB} + SS_{Bxswg})$$

pri čemu je SS_b zbir kvadriranih odstupanja između ispitanika (između subjekata), SS_w zbir kvadriranih odstupanja unutar ispitanika, SS_A zbir kvadriranih odstupanja za efekat neponovljenog faktora A, SS_{swg} zbir kvadriranih odstupanja za subjekte unutar grupa, SS_B zbir kvadriranih odstupanja za efekat ponovljenog faktora B, SS_{AB} zbir kvadriranih odstupanja za interakciju

neponovljenog i ponovljenog faktora i $SS_{B \times SWG}$ zbir kvadriranih odstupanja za interakciju ponovljenog faktora i subjekata unutar grupa.

(9) Jednostruka linearna regresija u kojoj je Y kriterijumska, a X prediktorska varijabla

38. Regresioni model za predviđanje vrednosti na kriterijumskoj varijabli Y na osnovu vrednosti na prediktorskoj varijabli X_1 :

a) Sirovi rezultati:

$$\boxed{y_i^* = b_0 + b_1 * x_i}$$

pri čemu je y_i^* predviđena vrednost kriterijumske varijable za jedinicu posmatranja e_i , b_0 intercept, a b_1 nagib regresione linije, tj. regresioni koeficijent za prediktorsku varijablu.

b) Standardizovani rezultati:

$$\boxed{z_{Y^*i} = r_{Y.X1} * z_{X_i} = b_1^* * z_{X_i}}$$

pri čemu je z_{Y^*i} predviđena vrednost standardizovane kriterijumske varijable za jedinicu posmatranja e_i , $r_{Y.X1}$ koeficijent linearne korelacije, z_{X_i} standardizovani rezultat na prediktorskoj varijabli za jedinicu posmatranja e_i , a b_1^* standardizovani regresioni koeficijent za prediktorsku varijablu.

39. Regresioni koeficijenti u jednostrukoj linearnoj regresiji u kojoj je Y kriterijumska, a X_1 prediktorska varijabla:

a) Sirovi rezultati:

$$b_0 = M_Y - b_1 * M_{X1}$$

$$b_1 = r_{Y.X1} * (S_Y / S_{X1})$$

b) Standardizovani rezultati:

$$b_0^* = 0$$

$$b_1^* = r_{Y.X1}$$

40. Razlaganje suma kvadrata na kriterijumskoj varijabli:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - M_Y)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i^* - M_Y)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2$$

ili

$$SS_t = SS_r + SS_{res}$$

pri čemu je:

M_Y – aritmetička sredina kriterijumske varijable;

SS_t – suma kvadriranih odstupanja rezultata od aritmetičke sredine svih rezultata na kriterijumskoj varijabli, tj. ukupna suma kvadrata;

SS_r – suma kvadriranih odstupanja za regresiju, tj. suma kvadriranih odstupanja predviđenih (na osnovu regresionog modela) vrednosti kriterijumske varijable od aritmetičke sredine rezultata na kriterijumskoj varijabli.

SS_{res} – suma kvadriranih odstupanja predviđenih od empirijski dobijenih rezultata na kriterijumskoj varijabli, tj. suma kvadrata grešaka predviđanja (ili reziduala).

41. Koeficijent determinacije, u oznaci $r^2_{Y.X1}$:

$$r^2_{Y.X1} = \frac{SS_r}{SS_t} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - M_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - M_Y)^2}$$

pri čemu je SS_r suma kvadrata za regresiju, a SS_t ukupna suma kvadrata na kriterijumskoj varijabli.

42. Statistici za testiranje nulte hipoteze o koeficijentu linearne korelacije:

t-statistik:

$$t = \frac{r_{Y.X1} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2_{Y.X1}}}$$

pri čemu je $r_{Y.X1}$ koeficijent linearne korelacije a n broj ispitanika.

ili

F-statistik:

$$F = \frac{r_{Y.X1}^2 (n - 2)}{1 - r_{Y.X1}^2}$$

(10) Višestruka (multipla) linearna regresiona analiza

43. Regresioni model za predviđanje vrednosti na kriterijumskoj varijabli Y na osnovu vrednosti na prediktorskim varijablama X_1, X_2, \dots, X_m :

a) Sirovi rezultati:

$$y_i^* = b_0 + b_1 * x_{i1} + b_2 * x_{i2} + \dots + b_m * x_{im}$$

pri čemu je b_0 regresiona konstanta a b_1, b_2, \dots, b_m nestandardizovani parcijalni regresioni koeficijenti za prediktorske varijable.

b) Standardizovani rezultati:

$$z_{Yi}^* = b_1^* * z_{i1} + b_2^* * z_{i2} + \dots + b_m^* * z_{im}$$

pri čemu su $b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*$ standardizovani parcijalni regresioni koeficijenti za prediktorske varijable.

44. Kvadrat koeficijenta multiple korelacije preko suma kvadrata

$$R_{Y.1,2,\dots,m}^2 = \frac{SS_r}{SS_t} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^* - M_Y)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - M_Y)^2}$$

45. Koeficijent multiple determinacije preko standardizovanih regresionih koeficijenata i koeficijenata linearne korelacije prediktorskih varijabli sa kriterijumskom:

$$R_{Y,1,2,\dots,m}^2 = b_1^* r_{YX1} + b_2^* r_{YX2} + \dots + b_m^* r_{YXm}$$

pri čemu su $b_1^*, b_2^*, \dots, b_m^*$ standardizovani parcijalni regresioni koeficijenti za prediktorske varijable a $r_{YX1}, r_{YX2}, \dots, r_{YXm}$ koeficijenti linearne korelacije prediktorskih varijabli sa kriterijumskom.

46. F-statistik za testiranje nulte hipoteze:

$$F = \frac{\frac{R_{Y,1,2,\dots,m}^2}{m}}{\frac{1 - R_{Y,1,2,\dots,m}^2}{n - m - 1}}$$

pri čemu je m broj prediktorskih varijabli a n broj ispitanika.

(11) Hi-kvadrat test

Test distribucije verovatnoća jedne kategoričke varijable

47. Pirsonov hi-kvadrat statistik

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(f_k - \phi_k)^2}{\phi_k}; \quad df = r - 1$$

pri čemu f_k označava empirijske, a ϕ_k očekivane, teorijske frekvencije.

Test nezavisnosti dveju kategoričkih varijabli

48. Pirsonov hi-kvadrat statistik

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^r \frac{(f_{jk} - \phi_{jk})^2}{\phi_{jk}}; \quad df = (r-1)(c-1)$$

(12) Binarna logistička regresija

49. Šanse (engl. Odds)

Ocena šansi, u oznaci O:

$$O = \frac{p}{1-p}$$

Pri tome, p je verovatnoća one kategorije binarne varijable čije nas šanse zanimaju.

Ocena verovatnoće, u oznaci p, na osnovu šansi za datu kategoriju binarne varijable:

$$p = \frac{O}{1+O}$$

50. Količnik šansi

Količnik šansi (engl. odds ratio) ili količnik unakrsnih proizvoda, u oznaci OR, predstavlja količnik šansi koje su dobijene za svaku od dveju kategorija neke dihotomne varijable:

$$OR_{1/0} = \frac{O(1)}{O(0)}$$

O(1) predstavlja šanse za kategoriju dihotomne varijable koja je označena cifrom 1, a O(0) šanse za kategoriju koja je označena nulom. Indeks u oznaci količnika šansi (1/0) označava da ovaj količnik predstavlja šanse za kategoriju 1 u odnosu na šanse za kategoriju 0.

51. Logistički regresioni model u različitim oblicima:

$$\ln(O) \equiv \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_j$$

$$p = \frac{\exp(b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_j)}{1 + \exp(b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_j)}$$

$$O = \frac{p}{1-p} = e^{b_0} e^{b_1 x_1} e^{b_2 x_2} \dots e^{b_m x_m} = \exp(b_0 + \sum_{j=1}^m b_j x_j)$$

Pri tome, ln je oznaka prirodnog logaritma, e je osnova prirodnog logaritma (e = 2.718...), p je proporcija određene kategorije, tj. uzoračka ocena verovatnoće π , b_0 i b_j , $j = 1, 2, \dots, m$ predstavljaju uzoračke ocene regresionih parametara, tj. logističkih koeficijenata za prediktorske varijable (β_0 i β_j , $j = 1, 2, \dots, m$), exp (•) je eksponencijalna funkcija, a x_j je prediktorska varijabla j.

(13) Uvod u loglinearne modele

52. Loglinearni model:

$$\ln \phi_p = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_{pj}, p=1, \dots, r$$

pri čemu je ϕ_p očekivana frekvencija u ćeliji p kontingencijske tabele, λ_j je parametar koji odgovara efektu određenog eksplanatornog člana modela, a x_{pj} je određeni eksplanatorni član modela.

53. Statistiki za testiranje aдекватnosti ili podesnosti loglinearnog modela:

Pirsonov statistik:

$$H^2 = \sum_{p=1}^r \frac{(f_p - \phi_p)^2}{\phi_p}$$

pri čemu je f_p empirijska frekvencija u ćeliji p , a ϕ_p je frekvencija u ćeliji p predviđena modelom.

Statistik zasnovan na količniku verodostojnosti:

$$H_L^2 = 2 \sum_{p=1}^r f_p \ln \frac{f_p}{\phi_p}$$

pri čemu je \ln prirodni logaritam.