DODATAK – MATEMATIČKI POJMOVNIK:

U pravljenju ovog pojmovnika korišćeni su sledeći izvori: Boričić i Ivović, 1999; Hađžić i Takači, 2000; Clapham, 1996; Freund, 1963; Rice, 1995; Bartoszynski & Niewiadomska-Bugaj, 2008; Лобоцкая, Морозов, & Дунаев, 1987).

Funkcija (Preslikavanje)

Preslikavanje (funkcija) *f* iz *A* u *B* (pri čemu su *A* i *B* dva neprazna skupa) je pravilo (zakon, propis, dogovor) koje svakom elementu skupa *A* dodeljuje tačno jedan element *f*(x) skupa *B*. Skup *A* predstavlja domen, definicioni skup ili oblast definisanosti funkcije, a skup *B* kodomen funkcije ili preslikavanja *f*. Element $x \in A$ predstavlja original, a *f*(x) sliku. Ako je *f*(x) = y tada se kaže da *f* preslikava x u y i piše se $f\colon x \to y$. U oznaci za zapisivanju funkcije, npr., y = *f*(x) oznaka *f* je oznaka za pravilo po kojem se elementima domena dodeljuje element iz kodmena funkcije. Oznakom *x* označava se *argument* funkcije ili „nezavisna varijabla“, a vrednosti argumenta su a, b i slično. Kada je, na primer, *x* = a, *y* ili *f*(a) je odgovarajuća vrednost funkcije ili „vrednost funkcije u tački a“.Važno je uočiti da kod funkcije svakom elementu iz domena odgovara samo jedan element iz skupa koji predstavlja kodomen funkcije. Dakle, za dato x može postojati samo jedno y, tj. vrednost funkcije ali više elemenata iz domena mogu imati jednu istu vrednost funkcije. Na primer, za odnos skupova slova i fonema u našem jeziku mogli bismo koristiti pojam funkcije samo ukoliko bismo koristili isključivo jedan alfabet (ćirilicu ili latinicu). Budući da jednom istom slovu u dvoalfabetskoj situaciji mogu odgovarati dve različite foneme (na primer P može biti fonema П ili fonema R) odnos grafema i fonema ne možemo u toj situaciji smatrati preslikavanjem u matematičkom smislu. Reči „preslikavanje“ i „funkcija“ su u opštem slučaju sinonimi. Reč „funkcija“ se u matematici uobičajeno koristi kada je domen skup realnih brojeva ili neki podskup tog skupa a kodomen skup realnih brojeva.

Funkcija se može zadati na više načina: analitički (formulom), tablično i geometrijski (grafikom). Primer analitički zadate funkcije bio bi: $y = x^3 + 5$ ili $f(x) = x^3 + 5$. Ponekad se pri analitičkom zadavanju funkcije koristi više formula, kao u sledećem primeru:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{za } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

Opšta šema tabelarnog zadavanja funkcije izgleda ovako:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	…	$f(x_n)$

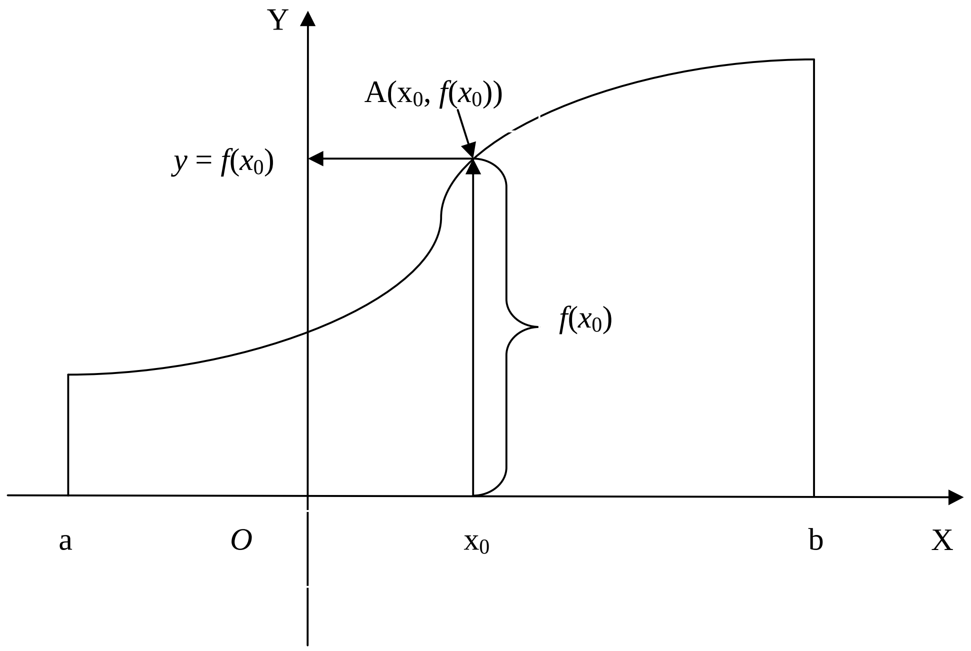
Dakle, ovaj prikaz sadrži parove pri čemu je prvi član para vrednost argumenta funkcije (u redu označenim oznakom x) a drugi član para je odgovarajuća vrednost funkcije (u redu označenim oznakom $f(x)$.

Na primer tabelarni prikaz funkcije kosinusa, $f(x) = \cos x$ izgledao bi ovako:

Ugao (x)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	1

Pri tabelarnom prikazivanju nemoguće je prikazati funkciju za sve moguće vrednosti argumenta. Najpoznatiji primeri tabelarnih prikaza funkcija u matematici su tablice logaritama i tabele trigonometrijskih funkcija.
Tabelarno zadavanje funkcija se primenjuje najviše u eksperimentalnim naukama.

Grafički se funkcija prikazuje preko skupa tačaka (x; y) ili (x; f(x)) u koordinatnom sistemu xOy.
Primer grafika jedne funkcije:



Uobičajeno, na grafiku funkcije osa X (apscisa) i osa Y (ordinata) su realne brojne linije (na prikazanom grafiku nisu unete nikakve brojne vrednosti zbog preglednosti). Funkcija koja je prikazana na grafiku definisana je u intervalu od a do b. Koordinata tačke A koja se nalazi na krivoj liniji (grafiku funkcije) određena je vrednošću argumenta funkcije, x_0 i odgovarajućom vrednošću funkcije za dati argument, $f(x_0)$. Vrednost argumenta funkcije nalazi se na X osi, a vrednost funkcije za dati argument na Y osi. Kada korišćenjem grafika funkcije za određenu vrednost argumenta funkcije (na primer vrednost x_0) treba naći vrednost funkcije, $f(x_0)$, potrebno je povući iz vrednosti x_0 liniju paralelnu sa Y osom do preseka sa grafikom funkcije i zatim iz tačke preseka povući liniju paralelnu sa osom X do ose Y.

Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija je definisana na sledeći način:

$y = f(x) = \log_a x$, $(x > 0)$, $(a > 0 \wedge a \neq 1)$

(Oznaka $\wedge$ označava logičku konjukciju. Stoga a treba da ispunjava oba uslova, tj. da bude veće od 0 i da ne bude jednako 1)

Oznakom a u logaritamskoj funkciji označena je osnova jer se ta funkcija definiše u odnosu na osnovu a. Odakle potiče osnova? Otuda što je po definciji logaritamske funkcije $y = \log_a x$ akko $x = a^y$ (akko je matematička skraćenica za "*ako i samo ako*", tj. za ekvivalenciju). Dakle, a je očigledno osnova koja se diže na eksponent y. Izraz $(x > 0)$ pokazuje da je domen logaritamske funkcije skup pozitivnih realnih brojeva: to sledi iz proste matematičke činjenice da je svaki stepen za osnovu a kako je ona određena u ovoj funkciji pozitivan broj. Dakle, logaritamska funkcija nije definisana za negativne brojeve.

Za $a > 1$ funkcija monotono raste, a za $0 < a < 1$ monotono opada.

Među najvažnije osobine logaritamske funkcije spadaju sledeće:

1. $\log_a (x * z) = \log_a x + \log_a z$ („logaritam proizvoda dva broja jednak je proizvodu njihovih logaritama)

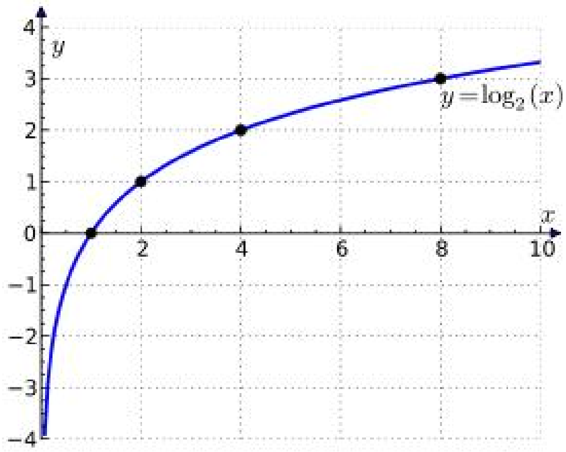
2. $\log_a (x / z) = \log_a z - \log_a z$ („logaritam količnika dva broja jednak je razlici njihovih logaritama")

3. Relacija između logaritama za različite baze data je sledećom formulom:

   $$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

   Dakle, kada logaritam od x za osnovu a podelimo logaritmom od b za osnovu a dobijamo logaritam od x za osnovu b.

Grafik logaritamske funkcije za $a = 2$ izgledao bi ovako:



O logaritmu broja x ima smisla razmišljati samo u kontekstu određene osnove. Osnova je broj koji se stepenuje, tj. diže na određeni stepen. Na primer u izrazu 10^2 osnova je 10 a stepen (eksponent ili izložilac) je 2. Dakle, kada razmišljamo o tome čemu je jednako $\log_a x$, tj. čemu je jednak „logaritam od x za osnovu a“ treba u sebi postaviti sledeće pitanje: „Na koji broj treba podići, tj. kojim brojem treba stepenovati osnovu *a* da bi se dobio broj x?“ Odgovor koji tako dobijemo predstavlja vrednost logaritma broja x. Na primer, znamo da kada broj 10 dignemo na stepen 2, tj. kada računamo koliko je 10^2 dobijamo broj 100. Prema tome, $\log_{10}100$ („logaritam od 100 za osnovu 10 jednak je 2). Isto tako, ako broj 2 dignemo na treći stepen, tj. računamo koliko je 2^3 dobijamo 2 * 2 * 2 = 8. Odatle znamo da osnovu 2 treba da dignemo na stepen 3 kako bismo dobili 8. Prema tome, $\log_2 8$ („logaritam od 8 za osnovu 2“) jednak je 3.

Osnova logaritma može biti bilo koji pozitivan realni broj različit od 1, a najčešće korišćene osnove u primeni logaritama su 10, 2 i e, pri čemu je e ≈ 2.7183. Logaritam za osnovu 10 zove se dekadni logaritam a logaritam za osnovu e prirodni ili Neperov loogaritam. Prirodni logaritam od *x* se uobičajeno označava oznakom ln *x* (što je, dakle, zamena za $\log_e x$).

Budući da se u analizama podataka ponekad susreće logaritam za osnovu 2, a da pojedini statistički paketi (na primer, SPSS) nemaju ugrađene funkcije za ovaj logaritam, radi računanja $\log_2 x$ možemo primeniti formulu koja sledi iz osobine navedene pod 3 koju smo dali pri navođenju najvažnijih osobina logaritamske funkcije menom te opšte formule dobijamo sledeći izraz:

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$$

Budući da je $\log_{10}2 = 0.301029$, dekadni logaritam od *x* treba pomnožiti brojem 1/0.301029, tj. brojem 3.3219 da bi se dobio logaritam od *x* za osnovu 2. U praktične svrhe dovoljno je koristiti približnu vrednost 3.3:

$$\log_2 x = 3.3 * \log_{10} x$$

Jedna od operacija u vezi sa logaritamskom funkcijom koja se ponekad koristi u analizama podataka je antilogaritmovanje. Ova operacija je definisana na sledeći način:

Ako je $\log_a x = y$ tada je $\text{antilog}_a y = x$.

Dakle, antilogaritmovanjem se zapravi „poništava" operacija logaritmovanja. Antilogaritam vrednosti logaritma *x* se dobija tako što se osnova logaritma digne na stepen koji je jednak vrednosti logaritma broja *x*. Ako smo o logaritmu broja *x* za osnovu *a* mislili kao o broju *y* na koji treba podići osnovu *a* da bi se dobio broj *x* tada o antilogaritmu broja *y* treba misliti kao o broju koji se dobija kada se osnova *a* podigne na *y*, tj. na vrednost logaritma broja *x*. Na primer, ako je $\log_{10} 100 = 2$ tada je $\text{antilog}_{10} 2 = 10^2 = 100$.

Antilogaritam od x za osnovu *a* je zapravo jednak a^x. Dakle, osnovu *a* treba naprosto stepenovati brojem čiji antilogaritam tražimo. Prema tome, $\text{antilog}_{10} x = 10^x$.

Dobro je zapamtiti jednostavna pitanja kojima možemo definisati logaritam i antilogaritam nekog broja *x* za osnovu *a*:

<u>Na koji stepen</u> treba dići osnovu *a* da bismo dobili broj *x*? <u>Stepen</u> je <u>logaritam</u> broja *x*.

<u>Koji broj</u> se dobija kada se osnova *a* digne na stepen *x*? <u>Broj</u> koji se dobija je antilogaritam od *x*.

Dakle, logaritam je <u>stepen</u> a antilogaritam <u>rezultat stepenovanja</u>.

Operator sabiranja (sumacioni operator)

Operatorom sabiranja, u oznaci $\sum_{i=1}^{n} x_i$, sažeto se prikazuje sabiranje indeksiranih vrednosti varijabli, tj. elemenata koji se označavaju indeksiranim opštim članom (indeksiranom promenljivom) koji se nalazi posle operatora. Izraz $\sum_{i=1}^{n} x_i$ čitamo kao "Suma x i, za i od 1 do n", a elementi ovog izraza su znak sume (Σ), promenljiva, opšti član ili sumand (x) i indeks sabiranja (*i*). Indeks sabiranja ima donju i gornju granicu koje su napisane ispod i iznad znaka Σ. U statistici su najčešće donja i gornja granica 1 i n, pri čemu je 1 prvi a n poslednji rezultat u nizu koje ima neka varijabla na uzorku od n ispitanika ili entiteta.

Tako, izraz $\sum_{i=1}^{n} x_i,\ i = 1, 2, ..., n$ znači da se sabiraju svi elementi nekog indeksiranog niza od prvog do n-tog elementa:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}.$$

Uočimo da je opšti član u izrazu $\sum_{i=1}^{n} x_i$ zapravo isti kao opšta oznaka podatka kada imamo samo jednu varijablu. Prema tome, primena ovog operatora na podatke sa jedne varijable daje zbir svih rezultata na varijabli.

Ako želimo, na primer, da saberemo rezultate pet ispitanika redom, pri čemu je rezultat prvog 12, drugog 10, trećeg 8, četvrtog 10 i petog ispitanika 5, onda opšti član x označava bilo koji rezultat, a na redosled ispitanika ili rezultata koji se sabira upućuje indeks uz opšti član. U ovom slučaju operator sabiranja bi sažeto označavao sledeći postupak:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 + 10 + 8 + 10 + 5 = 45.$$

Ukoliko se podrazumeva da se svi elementi skupa označeni opštim članom sabiraju onda se indeks u operatoru ponekad izostavlja. U prethodnom primeru, ako je jasno da se sabira svih n elemenata, tj. svih 5 rezultata mogli bismo operator sabiranja napisati i ovako:

$$\sum x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 + 10 + 8 + 10 + 5 = 45.$$

Veoma je korisno za razumevanje obrazaca u ovoj knjizi, kao i za praćenje literature iz oblasti statistike naučiti nekoliko osnovnih pravila koja važe za ovaj operator:

- Ako je x_i = k = konstanta za svako i, tada je

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i = n * k}$$

Drugačije rečeno, zbir od n istih elemenata (konstanti) jednak je prizvodu broja elemenata i konstante kojoj su jednaki svi elementi;

- Ako je k konstanta, tada je

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} k * x_i = k * \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Dakle, zbir proizvoda konstante i promenljive jednak je proizvodu konstante i zbira promenljive;

- Ako su x_i i y_i opšti članovi dva niza (dve varijable ili dva indeksirana sumanda) pri čemu je u oba niza indeks *i* isti, onda

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i}$$

Iskazano rečima, zbir za zbir opštih elemenata jednak je zbiru zbirova pojedinih opštih elemenata ili varijabli.

- Ako se nekoliko matematičkih operacija, uključujući i sabiranje, odvija na indeksiranom opštem članu, prvo se vrši stepenovanje, zatim deljenje i množenje, a sabiranje se obavlja poslednje, osim ako zagradama nije drugačije naznačeno. Na primer:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ali, zbog zagrade, važi sledeće:

$$\boxed{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}.$$

Treba uočiti: $\sum_{i=1}^{n}(x_i * y_i) \neq \sum_{i=1}^{n} x_i * \sum_{i=1}^{n} y_i$.

Zbir proizvoda opštih elemenata (promenljivih) **nije jednak** proizvodu zbirova pojedinih opštih elemenata ili promenljivih.

Operator dvostrukog sabiranja ili dvojni sumacioni operator

Ovaj operator definiše se na sledeći način:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{im}) = (x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1m}) + (x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2m}) +$$

$$+ \cdots + (x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nm}).$$

Uočimo da varijabla ili opšti član imaju dva indeksa: *i* i *j*. Svaki od ovih indeksa ima donju i gornju granicu sabiranja. Potrebno je za svaku vrednost indeksa spoljašnje ("leve") sume napraviti zbir svih elemenata po indeksu *j*. Dakle, za prvu vrednost indeksa *i* (vrednost 1) napravimo zbir svih elemenata za *j* od 1 do m i to isto ponovimo za svaku vrednost indeksa *i*. Na kraju saberemo sve ove zbirove i dobijemo zbir od ukupno n*m elemenata, pri čemu su n i m gornje granice sabiranja za indekse i i j.[1] Uočimo da je opšti element x_{ij} u operatoru dvostrukog sabiranja isti kao opšta oznaka podatka u matrici podataka. Prema tome, primenom operatora dvostrukog sabiranja može se dobiti zbir svih podataka u matrici ili tabeli podataka koja ima više od jedne varijable.

[1] Kao oznaku operacije množenja u ovoj knjizi koristimo znak *.

Bitno svojstvo ovog operatora je zamenljivost mesta dveju suma:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}$$

Operator proizvoda

Operator proizvoda, u oznaci $\prod_{i=1}^{n} x_i$ (čita se kao "proizvod x i, za i od 1 do n"), definiše se na sledeći način:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 * x_2 * \cdots * x_n}.$$

Radi se očigledno o operatoru kojim se sažeto prikazuje množenje indeksiranih elemenata nekog niza. Ako su 5, 2, 1 i 3 elementi nekog niza koji su dati ovim redosledom onda je $x_1 = 5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, a $x_4 = 3$, pa je proizvod članova ovog niza za i od 1 do 4:

$$\prod_{i=1}^{4} x_i = x_1 * x_2 * x_3 * x_4 = 5*2*1*3 = 30$$

Osnovna pravila koja važe za ovaj operator su:

- Ako je x_i = k = konstanta za svako i, tada je

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} k = k^n}.$$

Dakle, proizvod konstanti za *i* od 1 do n jednak je n-tom stepenu konstante;

- Ako je k = konstanta, a x promenljiva, tada je

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} kx_i = k^n \prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

Dakle proizvod za produkt konstante i promenljive jednak je proizvodu n-tog stepena konstante i proizvoda promenljive;

- Ako su x_i i y_i opšti članovi dva niza (dve varijable) pri čemu je u oba niza indeks i isti, onda je

$$\boxed{\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = (\prod_{i=1}^{n} x_i)(\prod_{i=1}^{n} y_i)}$$

Proizvod proizvoda dveju promenljivih jednak je proizvodu odvojenih proizvoda za svaku promenljivu;

- Logaritam proizvoda vrednosti promenljive jednak je zbiru logaritama vrednosti promenljive:

$$\boxed{\ln \prod_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln (x_i)}.$$

<u>Osnovni pojmovi i pravila kombinatorike</u>

Da bi se izračunale verovatnoće događaja često je potrebno odrediti sve moguće ishode eksperimenta. Kada je broj mogućih ishoda mali lako je odrediti koliko ishoda imamo i koji su to ishodi. Nekada to nije baš lako pa se koriste određena pravila:

1. Osnovno pravilo kombinatorike: Ako su rezultati eksperimenta k događaja, od kojih se prvi može desiti na n_1 načina, drugi na n_2 načina i tako redom, onda se svih k događaja mogu desiti na $n_1 * n_2 *\cdots* n_k$ načina.

Primer: Ako se na jedno pitanje u upitniku može odgovoriti na dva načina (recimo „DA“ ili „NE“), na drugo pitanje na tri načina („DA“ ili „?“ ili „NE“), a na treće pitanje na 5 načina („Uopšte se ne slažem“, „Ne slažem se“, „Neodlučan/neodlučna“, „Slažem se“, „Sasvim se slažem“) na koliko različitih načina se može odgovoriti na sva tri pitanja? Drugim rečima, koliko ukupno ima različitih mogućih složajeva odgovora na sva tri pitanja?

Odgovor je vrlo jednostavan: 2*3*5 = 30.

2. Permutacije predstavljaju svaki mogući redosled, poredak n elemenata, pri čemu se isti element ne može ponavljati više puta. Broj mogućih permutacija od n elemenata jednak je n faktorijel (u oznaci n!):

$nPn = n!/(n-n)! = n!$

jer je faktorijel 0 (u oznaci 0!) jednak 1.

Pri tome, n faktorijel (u oznaci n!) je proizvod svih brojeva od n do 1.

Primer: Na koliko sve načina se mogu poređati 4 različita broja?

Budući da je 4! jednako 4*3*2*1=24, 4 različita broja se mogu poređati na 24 načina.

3. Permutacije s ponavljanjem Ako među n elemenata ima n_1 međusobno jednakih , n_2 međusobno jednakih..., n_r međusobno jednakih, a pri tome je $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = \sum_1^r n_i =$ n, onda je broj načina na koji se n objekata može grupisati u r klasa sa n_i elemenata u svakoj klasi jednak:

$$nP_{n_1, n_2 \ldots n_r} = n!/(n_1!n_2! \cdots n_r!) = \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_r}.$$

Prethodni izraz $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_r}$ čita se kao „n nad n_1 , n_2 … n_r" i zove se multinomijski koeficijent, a pojavljuje se pri razvoju izraza

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r} ,$$

pri čemu se sumacija vrši za sve nenegativne cele brojeve n_1, n_2,…, n_r tako da je $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

4. Varijacije predstavljaju broj permutacija za samo r elemenata od svih n:

nPr = n (n-1)…(n - r + 1) = n! / (n-r)!

Ovaj obrazac omogućuje da izračunamo i broj uzoraka veličine r koji se mogu izvući iz populacije veličine n bez vraćanja, ali samo ako uzorak shvatimo kao uređen skup, tj. ako različiti redosledi istih elemenata predstavljaju različite uzorke.

5. Varijacije s ponavljanjem:

$nPr = n^r$

Ovaj obrazac omogućuje da izračunamo i broj uzoraka veličine r koji se mogu izvući iz populacije veličine n sa vraćanjem. Isto tako, pomoću ovog obrasca možemo izračunati broj mogućih načina da se odgovori na testu koji ima r pitanja, a na svako pitanje je ponuđeno n odgovora. Tako, na primer, ako ima 4 pitanja, a ponuđeni su samo odgovori DA ili NE, broj mogućih složajeva odgovora je $2^4 = 16$.

6. Kombinacije predstavljaju mogući broj grupisanja r elemenata od ukupno n elemenata, ali tako da se nizovi međusobno razlikuju bar po jednom elementu (različiti redosledi istih elemenata predstavljaju jedan isti niz).

${}_nC_r = {}_nP_r / r!$

ili

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}\ .$$

Pri tome, važe i sledeće jednakosti: ${}_nC_r = {}_nC_{n-r} = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$.

Izraz $\binom{n}{r}$ je binomni koeficijent, a čita se kao „n nad r“. Ovaj koeficijent se pojavljuje u razvoju binomnog izraza $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$ i koristi se u računanju verovatnoće kod binomne raspodele (Glava 3).

Primer: Koliko mogućih kombinacija od po 4 broja možemo napraviti iz skupa od 6 brojeva?

Rešenje:

${}_6C_4 = 6! / (4!2!) = 15$

7. Kombinacije sa ponavljanjem nam mogu pomoći da odredimo broj grupa veličine r koje se mogu dobiti iz populacije veličine n sa vraćanjem:

$${}_nC_r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Osnovni pojmovi teorije skupova

Skup

Skup je tzv. *osnovni pojam* u matematici, tj. pojam od kojeg se polazi ali koji se ne definiše. Skup se određuje navođenjem pravila i ograničenja na osnovu kojih je moguće odrediti sve članove nekog skupa. Skupovi se najčešće obeležavaju velikim kosim slovima latinice (npr. *A*, *B*, *E*, *P*) a elementi ili članovi skupova malim latiničkim slovima (npr. *a*, *b*, *e*, *p*).

Pripadnost elementa skupu beleži se na sledeći način: $e \in E$ (čita se „*e pripada skupu E*“ ili „*e je član skupa E*“). Ako element *a* nije član skupa *E* to se piše na sledeći način: $e \notin E$ (čita se „*e ne pripada skupu E*“).

Ako element *b* ima neko svojstvo ili osobinu *P* to pišemo na sledeći način: *P*(*b*).

Skup se može odrediti na dva načina:

a) navođenjem svih njegovih elemenata, npr. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) navođenjem osobine koju poseduju svi članovi skupa, u opštem slučaju $A = \{x \mid P(x)\}$. (Skup *A* sadrži elemente *x* ako imaju svojstvo P(x)).

   Primer: $A = \{x \mid x$ je ceo pozitivan broj manji od $6\}$. (Element *x* da bi bio član skupa treba da ispunjava uslov da je ceo pozitivan broj manji od 6).

   Primer: L = {x │ x je Lazarev brat od strica}, označava skup L koji čine sva Lazareva braća od stričeva.

(Oznaka│koju smo koristili u prethodnoj definiciji označava u matematici uslov i čita se “*ako*” ili “*pod uslovom*”).

Indeksirani skup

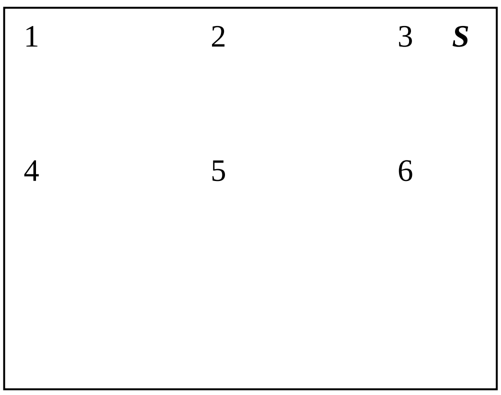
Skup *E* je indeksirani skup ako se sastoji od elemenata pri čemu svaki element skupa *E* odgovara nekom elementu *indeksujućeg* skupa *I*.

Primer: Uzorak jedinica posmatranja se u statistici najčešće definiše kao indeksirani skup *E*, pri čemu $E = \{e_i, i = 1, 2,\ldots n\}$. Indeksujući skup u ovom slučaju je skup prirodnih brojeva od 1 do n, pri čemu je n veličina uzorka, tj. ukupan broj jedinica posmatranja.

Univerzalni skup

U određenom razmatranju univerzalni skup je fiksiran i određen tako da to bude skup koji sadrži sve elemente koji su obuhvaćeni razmatranjem. U ovom tekstu ćemo taj skup označavati oznakom *S*.

Shematski univerzalni skup se može prikazati pravougaonikom. Ako je na primer u nekom razmatranju univerzalni skup skup pozitivnih celih brojeva od 1 do 9, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mogli bismo ga šematski prikazati na sledeći način:



Prazan skup

Prazan skup ne sadrži nijedan element i obeležava se oznakom Ą.

Na primer, prazan skup bi u našem slučaju mogao biti skup koji sadrži negativne brojeve koji pripadaju skupa *S* iz našeg primera.

Jednaki skupovi

Skupovi *A* i *B* su jednaki akko sadrže precizno iste elemente:

$A = B$ akko $(\forall x)(x \in A$ akko $x \in B)$. /Skup *A* je jednak skupu *B* ako i samo ako za svako *x* važi da *x* pripada skupu *A* ako i samo ako *x* pripada skupu *B*/.

(Oznaka akko je matematička skraćenica za "*ako i samo ako*", a oznakom $\forall$ označava se univerzalni kvantifikator i čita se "*za svaki*" ili "*za sve*". Npr., $\forall$x čita se kao "za svako x" ili "za sve x").

Ako skupovi *A* i *B* nisu jednaki onda to beležimo na sledeći način: $A \neq B$.

Podskup

Skup *A* je podskup skupa *B* akko ako element *x* pripada skupu *A* onda *x* pripada skupu *B*:

$A \subseteq B$ akko $(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$.Oznaka $\subseteq$ je oznaka za "biti podskup".

(Oznaka Ĝ označava logičku implikaciju. Iskaz "p Ĝ q" (čita se "p *implicira* q" ili "*ako* p *onda* q") je istinit ako su oba iskaza istinita ili ako je iskaz p neistinit a iskaz q istinit ili ako su oba iskaza neistinita. Npr. iskaz "Ako profesor nastavi predavanje zaboleće me glava" istinit je ako je 1. iskaz "Profesor nastavlja predavanje" istinit i iskaz "Boli me glava" istinit ili 2. iskaz "Profesor nastavlja predavanje" neistinit a iskaz "Boli me glava" istinit ili 3. ako su oba iskaza neistinita).

Ako je skup *A* podskup skupa *B* onda skup *B* obuhvata ili uključuje u sebe skup *A*. To označavamo na sledeći način:

$B \supseteq A$.

Primer: Skup {1, 2, 3, 4, 5} je podskup skupa {1, 2, 3, 4, 5}.

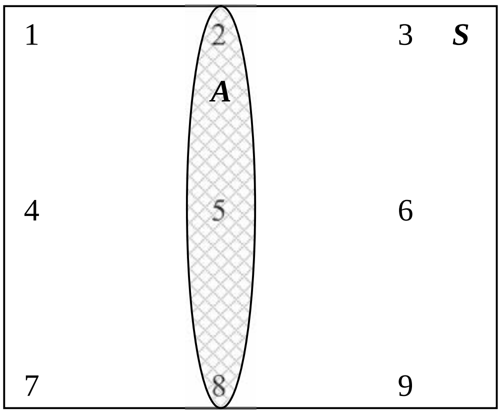
Pravi podskup

Skup *E* je pravi podskup skupa *P* ako i samo ako je *E* podskup skupa *E* i skupovi *E* i *P* nisu jednaki:

$E \subset P$ akko $[(A \subseteq P) \wedge (A \neq P)]$

Oznaka $\subset$ je oznaka za “biti pravi podskup”.

Primer: Skup $A = \{2, 5, 8\}$ je pravi podskup skupa $S = \{x \mid x$ je ceo pozitivan broj jednak 9 ili manji od 9$\}$.



Unija skupova

Unija skupova *A* i *B* ($A \cup B$, čita se “*A unija B*”, pri čemu su skupovi *A* i *B* podskupovi skupa *S*) je skup koji sadrži sve elemente koji pripadaju skupu *A* ili skupu *B* (ili je član oba skupa):

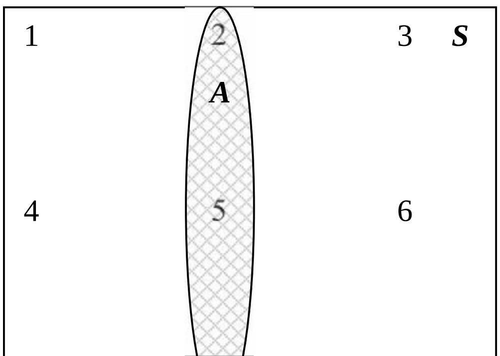
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.

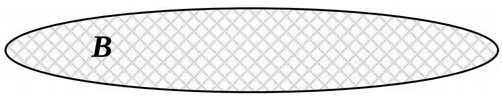
(Oznakom $\vee$ označavamo logičku disjunkciju: iskaz “p $\vee$ q**”** (čita se “p *ili* q”) je istinit ako je iskaz p istinit ili je iskaz q istinit ili su oba iskaza istiniti Npr. iskaz “Pada kiša ili pada sneg” ako je iskaz “Pada kiša” istinit ili je iskaz “Pada sneg” istinit ili su oba iskaza istinita).

Ako se radi o n skupova, pri čemu je n veće od 2 tada se unija skupova može označiti na sledeći način:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Primer: Unija skupova $A = \{2, 5, 8\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$ je skup $\{2, 4, 5, 6, 8\}$.





Uočimo da u uniju skupova A i B ulaze ne samo elementi koji se nalaze samo u tim skupovima ponaosob {2, 8} i {4 6} već i element koji je zajednički za oba skupa {5} ali ovaj element ulazi samo jedanput u skup koji predstavlja uniju skupova. Prema tome, iako svaki od skupova A i B ima po 3 elementa, unija ova dva skupa sadrži 5 elemenata jer se jedan isti element pojavljuje u oba skupa.

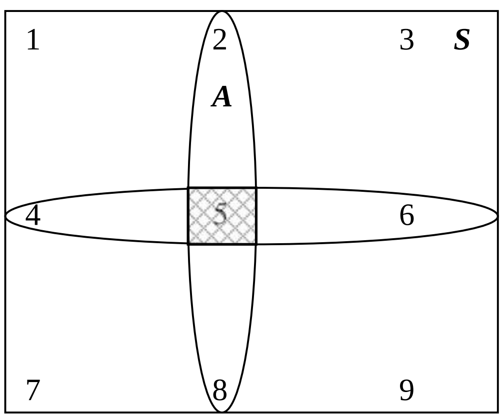
Presek skupova

Presek skupova A i B ($A \cap B$, čita se "*A presek B*", pri čemu su skupovi A i B podskupovi skupa S) je skup koji sadrži elemente koji pripadaju i skupu A i skupu B:

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$.

(Oznakom $\wedge$ označavano logičku konjukciju: iskaz "p $\wedge$ q" (čita se "p i q") je istinit ako je i iskaz p istinit i iskaz q istinit. Npr. iskaz "Pada kiša i grmi" istinit je ako su iskazi "Pada kiša" i "Grmi" istiniti).

Primer: Presek skupova $A = \{2, 5, 8\}$ i $B = \{4, 5, 6\}$ je skup {5}.

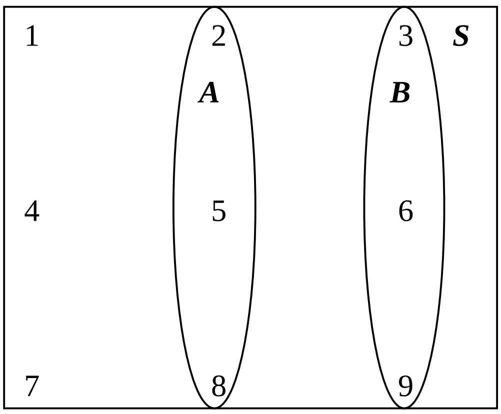


Ako se radi o n skupova, pri čemu je n veće od 2 tada se presek skupova može označiti na sledeći način:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Ako je presek skupova *A* i *B* prazan skup ($A \cap B =$ Ą), tada su skupovi *A* i *B* <u>disjunktni</u>.

<u>Primer</u>: Presek skupova $A = \{2, 5, 8\}$ i skupa $B = \{3, 6, 9\}$ je skup Ą.

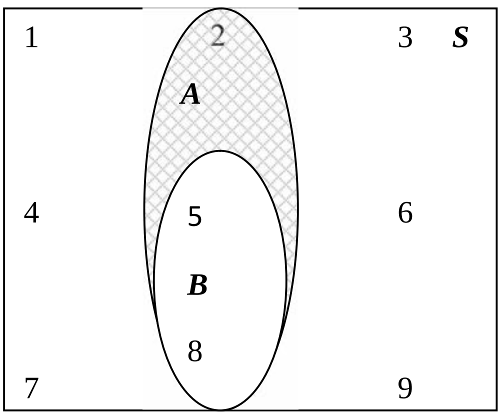


<u>Razlika skupova</u>

Razlika skupova *A* i *B* ($A - B$, čita se "*A razlika B*", pri čemu su skupovi *A* i *B* podskupovi skupa *S*) je skup koji sadrži elemente koji pripadaju skupu *A* ali ne pripadaju skupu *B*:

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

<u>Primer</u>: Razlika skupova $A = \{2, 5, 8\}$ i $B = \{5, 8\}$ je skup $\{2\}$.



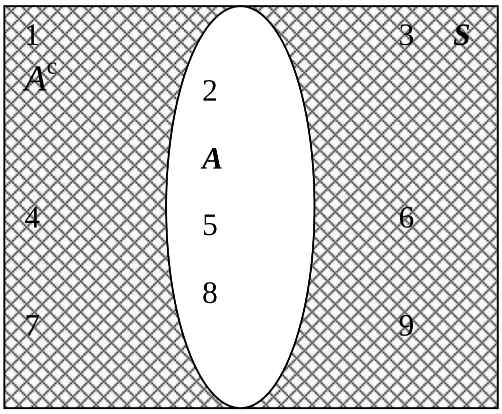
Komplement skupa

Komplement skupa *A*, pri čemu je *A* podskup univerzalnog skupa *S* (A^c , čita se "*komplement skupa A*") je skup koji sadrži sve elemente skupa *S* koji ne pripadaju skupu *A*:

$A^c = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$.

Uočimo da je $A^c = S - A$.

Primer: Ako univerzalni skup obuhvata cele brojeve od 1 do 9, a skup $A = \{2, 5, 8\}$ tada je $A^c = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$.



Osnovna pravila algebre skupova (osnovne osobine operacija na skupovima)

1. Pravilo o komplementu:
   $A \cap A^c = \emptyset$;
   $A \cup A^c = S$;
2. Pravilo identiteta:
   $A \cap S = A$;
   $A \cup S = S$;
3. Komutativnost preseka i unije:
   $A \cap B = B \cap A$
   $A \cup B = B \cup A$;
4. Asocijativnost preseka i unije:
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
5. Distributivnost:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Relacija

Da bismo matematički definisali pojam relacije potrebno je prethodno definisati pojmove *uređeni par elemenata* i *Dekartov proizvod skupova*.

Uređeni par elemenata

Ako su skupovi X i Y neprazni, uređen par (x, y) elemenata $x \in X$ i $y \in Y$ definiše se kao skup sa dva elementa na sledeći način:

$(x, y) = \{(x), (x, y)\}$.

Činjenica da je par uređen znači da je bitan redosled elemenata u paru: prema tome, (x, y) nije isto što i (y, x).

Dekartov proizvod skupova

Dekartov proizvod skupova X i Y , u oznaci $X \otimes Y$, je skup svih uređenih parova (x, y), pri čemu $x \in X$ i $y \in Y$:

$$X \otimes Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y \}$$

Primer: Ako su X i Y skupovi, $X = \{a, b\}$, $Y = \{2, 4\}$, tada je $X \otimes Y = \{(a, 2), (a, 4), (b, 2), (b, 4)\}$.

Relacija

Relacija u opštem slučaju predstavlja bilo koji podskup Dekartovog proizvoda. Najčešće se kada se govori o relacija govori o binarnim relacijama. Binarna relacija $\circ$ na nepraznom skupu X je podskup skupa $X \otimes X$. Ako uređeni par (x, y) pripada skupu $\circ \subset X \otimes X$ tada pišemo $x \circ y$ i kažemo: x i y su u relaciji $\circ$.

Primer: za skup $X = \{1,2,3\}$ skup svih uređenih parova $\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ je $X \otimes X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$. Prema tome $\circ = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$, budući da je podskup skupa $X \otimes X$ predstavlja relaciju na skupu X.

Neke važne osobine relacija

- refleksivnost: $(\forall x \in X)\ x \circ x$ („za svako x iz X x je u relaciji $\circ$ sa x"); Primer: relacija *ekvivalencije* ili relacija *biti jednak* u skupu brojeva je refleksivna jer je x jednako samom sebi. Slično tome, relacija *identičnosti* u skupu ljudi je refleksivna jer je svako identičan sa samim sobom.

- simetričnost: $(\forall x, y \in X)\ x \circ y \Rightarrow y \circ x$ („za svako x i svako y iz X ako je x u relaciji $\circ$ sa y onda je y u relaciji $\circ$ sa x"). Primer: *biti krvni srodnik.*Ako je Nenad krvni srodnik sa Lazarom, tada je i Lazar krvni srodnik s Nenadom.

- antisimetričnost: $(\forall x, y \in X)\ x \circ y \wedge y \circ x \Rightarrow x = y$ („za svako x i svako y iz X ako je x u relaciji $\circ$ sa y i y u relaciji $\circ$ sa x onda je x jednako y"). Primer: relacija *biti veći ili jednak* u skupu brojeva je antisimetrična. Ako je broj x veći ili jednak y, a y veći ili jednak x, odatle sledi da je x = y.

- tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in X)\ x \circ y \wedge y \circ z \Rightarrow x \circ z$. Primer: relacija *biti inteligentniji* je tranzitivna. Ako je Jovan inteligentniji od Nemanje, a Nemanja inteligentiji od Andrije, onda je Jovan inteligentniji od Andrije. (Pretpostavljamo, naravno, da je inteligencija kvantitativna karakteristika koju pouzdano i precizno možemo meriti).

Relacija $\circ = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$ iz prethodnog primera je refleksivna (sadrži sve uređene parove (1,1), (2,2), (3,3)), simetrična (sadrži uređene parove (1,3), (3,1)) i tranzitivna (sadrži uređene parove (1,3), (3,1) i (1,1)).

Mnoge relacije kojima se bavi psihologija nemaju navedene osobine. Na primer, relacija *biti zaljubljen* nije nužno simetrična: ako je Marko zaljubljen u Milenu to ne mora da znači da je Milena zaljubljena u Marka. Ova relacija nije ni tranzitivna: ako je Marko zaljubljen u Milenu a Milena zaljubljena u Miloša iz toga ne sledi da je Marko zaljubljen u Miloša. (Iz toga može psihološki gledano slediti drama, a ako još i Miloš nije zaljubljen u Milenu onda tu ima bar dvoje nesrećno zaljubljenih: Marko i Milena. Za Miloša još ima nade, ako je zaljubljen u neku drugu devojku koja je zaljubljena u njega.)

Boričić, B. i Ivović, M. (1999). *Matematika, drugo izdanje*, Beograd: Ekonomski fakultet.

Clapham, C. (1996). *The concise Oxford Dictionaty of Mathematics, Second Edition*. Oxford: Oxford University Press.

Hađžić, O. i Takači, Đ. (2000). *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*. Novi Sad: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet.

Freund, J. E. (1963). *Mathematical Statistics*. Englewood Clifs, N.J.: Prentice-Hall, Inc.

Н. Л. Лобоцкая, Ю. В. Морозов, & Дунаев, А. А. (1987). Высшая математика. Минск: Вышэйшая школа.

Rice, J. A. (1995). *Mathematical Statistics and Data Analysis*, Second Edition, Belmont: Duxbury Press.