DODATAK 2: OSNOVNI POJMOVI MATRIČNE ALGEBRE

Iz knjige: Tenjović, L. (2020). *Statistika u psihologiji, drugo dopunjeno i izmenjeno izdanje.* Beograd: Centar za primenjenu psihologiju.

Osnovna namena Dodatka 2 nije da bude matematički uobičajen prikaz matrične algebre, već da korisniku Priručnika omogući da prati matričnu notaciju koja je često korišćena u Priručniku. Autor je nastojao da osnovne pojmove iz matrične algebre prikaže što jednostavnije i da, pritom, što je više moguće, koristi primere koji su u bliskoj vezi sa sadržajem ove knjige. Korisnici knjige koji žele da postignu dublje razumevanje matrične algebre trebalo bi da, pored ovog dodatka, prouče dodatak Elementi linearne algebre u Momirović, Wolf i Popović (1999). Vrlo korisni izvori na engleskom jeziku za savladavanje elemenata matrične algebre, pogotovu za čitaoca koji nema primarno matematičko obrazovanje, jesu Green & Carroll (1976), Horst (1963) i Searle (1966). (Navedeni izvori su korišćeni i za pisanje ovog dodatka. Potpuni bibliografski podaci o navedenim knjigama nalaze se u spisku referenci).

SADRŽAJ DODATKA 2

1. MATRICE

Matrica je matematička struktura pravougaonog ili kvadratnog oblika koja sadrži nizove elemenata poređanih u redove i kolone. Broj redova i broj kolona koji matrica sadrži pokazuju red ili dimenzije matrice. Tako, za matricu koja ima 5 redova i 6 kolona kažemo da je matrica reda 5x6 (pet puta šest). Matrice se obično obeležavaju velikim zadebljanim slovima kao, na primer, **X**, **A**, **D**, **Σ**, **Δ**...

Svaki element matrice nalazi se na mestu na kojem se ukršta određeni red i određena kolona matrice. U ovom tekstu pretpostavljaćemo da su elementi koji se nalaze u matrici realni brojevi, mada u opštem slučaju to mogu biti elementi nekog drugog skupa, na primer skupa kompleksnih brojeva. U opštem slučaju element matrice označava se malim slovom uz koje se pišu dva indeksa: prvi indeks je oznaka reda matrice u kojem se nalazi taj element, a drugi indeks je oznaka kolone matrice u kojoj se nalazi taj element. Tako, na primer, u matrici podataka, u kojoj uobičajeno redovi sadrže podatke o ispitanicima ili jedinicama posmatranja, a kolone sadrže varijable, rezultat ispitanika L. T. (treći red) na varijabli introverzija (druga kolona) nalazi se na mestu na kojem se ukršta treći red i druga kolona i označava se oznakom x_{32}. Ako matrica podataka izgleda ovako:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 10 \\ 18 & 11 & 9 \\ 12 & 4 & 11 \\ 16 & 2 & 18 \\ 14 & 8 & 12 \end{bmatrix},$$

onda je reč o matrici reda 5x3, a rezultat ispitanika L. T. na varijabli introverzija jednak je 4. To bismo mogli još napisati i ovako: $x_{32} = 4$. Elementi koje sadrži matrica uobičajeno se pišu unutar uglaste zagrade kao što je to prikazano u ovom primeru.

U opštem slučaju matrica reda nxm izgledala bi ovako:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \cdots x_{1j} \cdots x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \cdots x_{2j} \cdots x_{2m} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \cdots x_{3j} \cdots x_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \cdots x_{ij} \cdots x_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \cdots x_{nj} \cdots x_{nm} \end{bmatrix}$$

Uočimo da opšti element x_{ij} ima dva indeksa (indeks reda i indeks kolone u kojoj je element) i da indeks i (indeks reda) uzima vrednosti od 1 do n, a da se vrednosti indeksa j (indeksa kolone) kreću od 1 do m. Moguće je, stoga, matricu **X** napisati i u sledećem obliku:

$$\mathbf{X} = \{x_{ij}\},\ i = 1, 2,..., n;\ j = 1, 2,..., m.$$

1.1. Kvadratna matrica

Matrica koja ima jednak broj redova i kolona zove se kvadratnom matricom. Tipični primeri kvadratnih matrica u analizi podataka u psihologiji jesu matrica kovarijansi i matrica interkorelacija.[210] Na primer, matrica interkorelacija za četiri varijable (MSUKUP, E, NEUROT, EKSTRA) izgledala bi ovako:

	MSUKUP	E	NEUROT	EKSTRA
MSUKUP	1.00	.32	.53	-.32
E	.32	1.00	-.05	.06
NEUROT	.53	-.05	1.00	-.41
EKSTRA	-.32	.06	-.41	1.00

Ova matrica je reda 4x4.

1.2. Dijagonalna matrica

Matrica čiji su svi vandijagonalni elementi, tj. elementi za koje je $i \neq j$ (na primer x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}...), jednaki nuli, a čiji svi dijagonalni elementi, tj. elementi za koje je $i = j$ (na primer x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44}...), ne moraju biti jednaki nuli jeste dijagonalna matrica.

1.3. Skalarna matrica

Skalarna matrica je dijagonalna matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki.

1.4. Matrica identiteta (**I**)

Skalarna matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki jedinici zove se matricom identiteta i uobičajeno se označava oznakom **I**. Kada bi svi elementi izvan glavne dijagonale u matrici interkorelacija u prethodnom primeru bili jednaki nuli, onda bismo u tom slučaju imali primer matrice identiteta.

1.5. Množenje matrice skalarom

U matričnoj algebri realni brojevi se obično zovu skalarima. Matrica se množi skalarom ili realnim brojem tako što se svaki element matrice pomnoži tim skalarom.

1.6. Transpon matrice ($\mathbf{X}^t$)

Kada kolone neke matrice pretvorimo u redove (te, prema tome, redove u kolone), onda smo početnu matricu transponovali, a matrica koju dobijamo ovom

[210] Pojmovi kovarijanse i korelacije objašnjeni su u glavi **XI**.

operacijom je transpon početne matrice. Transpon matrice obično se označava malim slovom t kao eksponentom iznad oznake matrice (što je slučaj i u Priručniku) ili jednostrukim apostrofom uz oznaku matrice ($\mathbf{X}'$).

Na primer, transpon matrice **X**:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 10 \\ 18 & 11 & 9 \\ 12 & 4 & 11 \\ 16 & 2 & 18 \\ 14 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

jednak je:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 15 & 18 & 12 & 16 & 14 \\ 12 & 11 & 4 & 2 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

Formalno, operaciju transponovanja mogli bismo definisati na sledeći način:

Ako je $\mathbf{X} = (\mathrm{x}_{ij})$, tada je $\mathbf{X}^{\mathrm{t}} = (\mathrm{x}_{ij})^{\mathrm{t}} = (\mathrm{x}_{ji})$.

Očigledno, element koji je u početnoj matrici bio u redu *i* a u koloni *j* u transponovanoj matrici biće u redu *j* a u koloni *i*.

Zapamtite:

- Ako je *a* skalar, tj. realan broj ili oznaka realnog broja, tada je $(a\mathbf{X})^{\mathrm{t}} = a\mathbf{X}^{\mathrm{t}}$;
- $(\mathbf{X}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \mathbf{X}$. Transpon transponovane matrice jednak je početnoj matrici.

2. VEKTORI

Mada se pojam vektora može formalno mnogo bolje definisati, u ovom tekstu pod vektorom ćemo podrazumevati matricu koja ima samo jedan red (redni vektor) ili samo jednu kolonu (kolonski vektor). Dakle, **redni vektor je matrica reda 1xm, a kolonski vektor je matrica reda nx1**. Svaka varijabla u matrici podataka na kojoj su podaci za n ispitanika ili jedinica posmatranja u ovom smislu predstavlja kolonski vektor. Svaki ispitanik koji ima podatke na m varijabli u toj matrici može se posmatrati kao redni vektor. Kolonske vektore ćemo u ovom tekstu označavati malim zadebljanim slovima (na primer **x**), a redne vektore kao transpone kolonskih vektora ($\mathbf{x}^{\mathrm{t}}$)[211]. Prema tome, budući da su vektori (onako kako su ovde definisani) specijalni

[211] Korisnik Priručnika treba da ima na umu, ako koristi matematičke knjige iz ove oblasti, da neki autori koriste upravo suprotno označavanje od onoga koje je korišćeno u ovom tekstu.

slučajevi matrica, za njih važe pravila množenja skalarom i transponovanja koja smo objasnili u prethodnom tekstu.

2. 1. Sabiranje i oduzimanje matrica i vektora

Matrice i vektori mogu se sabirati i oduzimati samo ako su istog reda, tj. jednakih dimenzija. U tom slučaju oduzimanje i sabiranje protiče tako što se saberu (oduzmu) elementi dva vektora ili dve matrice koji imaju isti indeks. Figurativno rečeno, treba u mislima „poklopiti“ dva vektora ili dve matrice istih dimenzija, te sabrati (oduzeti) elemente koji se međusobno poklapaju.

Zapamtite: Sabiranje (oduzimanje) vektora ili matrica, kao i množenje matrice ili vektora skalarom, jesu **komutativne** operacije jer važe sledeća pravila:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{Y} + \mathbf{X}; \qquad a\mathbf{x} = \mathbf{x}a; \qquad a\mathbf{X} = \mathbf{X}a.$$

2.2. Skalarni proizvod vektora

Da bismo dobili skalarni proizvod dva vektora, prvi član proizvoda mora biti redni vektor, a drugi član proizvoda mora biti kolonski vektor. Pri tome, broj elemenata u rednom vektoru mora biti jednak broju elemenata u kolonskom vektoru. Množenje se odvija tako što se, figurativno rečeno, „poklope“ elementi dva vektora koji imaju isti redosled (prvi član jednog vektora sa prvim članom drugog vektora i tako redom), zatim se elementi dva vektora koji se „poklapaju“ pomnože i, na kraju, tako dobijeni proizvodi saberu. Kao rezultat ovoga dobija se jedan broj – skalar. Otuda i potiče naziv ovog proizvoda. Ponekad se ovaj proizvod zove i unutrašnjim proizvodom vektora.

Najjednostavnije se skalarni proizvod dva vektora ($\mathbf{x}^t$ i $\mathbf{y}$) može definisati na sledeći način:[212]

Ako su $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, ..., x_n)$ i $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ vektori reda 1xn i nx1,

tada je $\mathbf{x}^t\,\mathbf{y} = (x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + x_3 * y_3 + \cdots + x_n * y_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i * y_i)$

skalarni proizvod vektora **x** i **y**.

Primer:

[212] Operator sabiranja Σ koji se pojavljuje u ovoj definiciji objašnjen je u glavi **III**.

Ako su $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ dva vektora, njihov skalarni proizvod je $\mathbf{x}^t\mathbf{y} = (2 * 5 + 5 * 4 + 1 * 6 + 3 * 4) = 48$. Uočimo da je potrebno vektor **x** transponovati pre skalarnog množenja.

2.3. <u>Dužina vektora</u>

Dužina vektora jednaka je kvadratnom korenu iz zbira kvadriranih elemenata vektora. Uočimo da se dužina vektora može definisati i preko skalarnog proizvoda vektora sa samim sobom. Naime, ako je **x** vektor reda 1xn, tada je

$$\mathbf{x}^t\mathbf{x} = (x_1 * x_1 + x_2 * x_2 + x_3 * x_3 + \cdots + x_n * x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i^2),$$

te je, prema tome, dužina vektora jednaka kvadratnom korenu iz skalarnog proizvoda vektora sa samim sobom.

2.4. <u>Jedinični vektor</u>

Vektor čija je dužina jednaka jedinici ili vektor za koji je zbir kvadriranih elemenata jednak jedinici zove se jedinični vektor. (Ove dve definicije su iste jer je kvadratni koren iz broja 1 jednak jedinici.)

2.5. <u>Vektor jedinica ili sumacioni vektor</u>

Sumacioni vektor je vektor čiji su svi elementi jednaki jedinici. U Priručniku je ovaj vektor uobičajeno označen slovom **e**.

<u>Zapamtite</u>: Skalarni proizvod sumacionog vektora sa nekim drugim vektorom **x** daje rezultat koji je jednak zbiru elemenata vektora **x**:

$$e^t x = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

2.6. <u>Linearna kombinacija vektora</u>

Vektori se mogu linearno kombinovati da bi se dobio novi vektor. To se izvodi tako što se svaki vektor koji ulazi u linearnu kombinaciju pomnoži nekim brojem, tj. skalarom, a zatim se dobijeni proizvodi saberu.
Jednostavnije rečeno, ako su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ realni brojevi, a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ skup m vektora, onda se linearna kombinacija ovih vektora može definisati na sledeći način:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j * x_j = a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \cdots + a_m * x_m = y .$$

Dakle, vektor **y** nastao je linearnim kombinovanjem skupa vektora $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$, a brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ zovu se i <u>koeficijentima za linearnu kombinaciju</u>.

2.7. Ortogonalnost dva vektora

Dva vektora **x** i **y** su ortogonalni akko (čita se kao *ako i samo ako*) je njihov skalarni proizvod ($\mathbf{x}^t\mathbf{y}$) jednak nuli.

2.8. Linearna nezavisnost vektora

Ako se linearnim kombinovanjem nekog skupa vektora može dobiti vektor nula (vektor čiji su svi elementi nule) ali tako da se bar jedan vektor koji ulazi u linearnu kombinaciju može pomnožiti brojem različitim od nule, onda je taj skup vektora linearno **zavisan**.

Jednostavnije rečeno, ako su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ realni brojevi, a $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ skup m vektora, ovaj skup vektora je linearno nezavisan, ako je moguće samo trivijalno rešenje sledeće jednačine:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j * x_j = a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + \cdots + a_m * x_m = 0 .$$

Trivijalno rešenje ove jednačine je rešenje pri kojem su svi koeficijenti za linearnu kombinaciju jednaki nuli, tj. $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$.

3. OBIČNI PROIZVOD MATRICA

Postoje različiti tipovi množenja dveju matrica. U ovom tekstu objasnićemo samo tzv. obični proizvod dveju matrica koji se može izvesti samo onda kada matrica koja je u proizvodu prva (sa leve strane) ima onoliko kolona koliko redova ima matrica koja je u proizvodu druga (sa desne strane). Ovaj proizvod se zapravo svodi na skalarno množenje redova prve matrice sa kolonama druge matrice. Dakle, ako je matrica **X** reda nxm, a matrica **Y** reda mxp, onda se ove matrice mogu pomnožiti.
Tada je:

$$\boxed{\mathbf{X}_{nxm}\,\mathbf{Y}_{mxp} = \mathbf{Z}_{nxp}.}$$

Uočimo da indeksi matrica koje se množe a nalaze se sa unutrašnje strane (m) moraju biti isti da bi se matrice mogle pomnožiti. Pored toga, važno je uočiti da „spoljašnji" indeksi dveju matrica (n i p) određuju red ili dimenzije matrice koja se dobija njihovim množenjem. Obični proizvod dveju matrica koje se mogu pomnožiti dobija se tako što se prvi red matrice koja je sa leve strane skalarno množi sa svakom kolonom matrice koja je sa desne strane. Brojevi dobijeni na ovaj način smeštaju se redom u prvi red matrice koja se dobija množenjem dveju matrica. Dakle, elementi nove matrice, koji se dobijaju skalarnim množenjem određenog reda matrice sa leve strane i određene kolone matrice sa desne strane, imaju prvi indeks koji odgovara indeksu reda leve matrice, dok drugi indeks tog elementa odgovara indeksu kolone desne matrice. Isti postupak ponavlja se sa svakim sledećim redom matrice sleva.

Jednostavnije se ovaj produkt može definisati na sledeći način:

Ako je **X** matrica reda nxm, a matrica **Y** reda mxp, onda je matrica **Z** reda nxp proizvod matrica **X** i **Y**, tj. **Z** = **XY**, pri čemu je element u redu *i* a u koloni *j* matrice **Z** dat sledećim izrazom:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (x_{ik} * y_{kj}),\ i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, p.$$

Primer:
Ako su date matrice **X** i **Y**, pri čemu je:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

tada je matrica **Z**, pri čemu je:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

jednaka proizvodu matrica **X** i **Y**, tj. **Z = XY**.

Kako se izvodi ovo množenje?
1. Pomnožimo skalarno <u>prvi red</u> matrice **X** sa <u>prvom kolonom</u> matrice **Y**:
1 * 1 + 0 * 0 + 2 * 0 = 1. Broj koji smo dobili je element u prvom redu i prvoj koloni matrice **Z**;
2. Pomnožimo skalarno <u>prvi red</u> matrice **X** sa <u>drugom kolonom</u> matrice **Y**:
1 * 2 + 0 * 1 + 2 *- 1 = 0. Broj koji smo dobili je element u prvom redu i drugoj koloni matrice **Z**;
3. Po istom principu skalarno množimo <u>drugi red</u> matrice **X** sa prvom, potom sa drugom kolonom matrice **Y**. Dobijeni elementi nalaze se u drugom redu i prvoj koloni, odnosno u drugom redu i drugoj koloni matrice **Z**;
4. To isto ponovimo sa trećim i četvrtim redom matrice **X**;
Uočimo, dakle, da elementi za matricu **Z** koje dobijamo na ovaj način imaju prvi indeks koji odgovara indeksu reda leve matrice, dok drugi indeks odgovara indeksu kolone desne matrice.
Matrica **X** je reda 4x3, a matrica **Y** reda 3x2. Matrica **Z** koja se dobija njihovim množenjem je reda 4x2. Dakle, njen red jednak je *broj redova leve* x *broj kolona desne* matrice. To je uvek slučaj u običnom množenju matrica, koje smo ovde prikazali.
Veoma je važno uočiti na ovom primeru da se dve matrice mogu pomnožiti u jednom redosledu, ali ne mora biti moguće pomnožiti ih u obrnutom redosledu. Naime, nije moguće u navedenom primeru ni napraviti proizvod **YX** prema pravilu koje važi za obično množenje matrica!

Zapamtite:

- Za množenje matrica ne važi komutativnost!U opštem slučaju $\mathbf{XY} \neq \mathbf{YX}$.

- $\mathbf{XI} = \mathbf{X}$; $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$;
  Množenje matrice **X** matricom identiteta **I** ne menja matricu **X**;

- $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^t = \mathbf{X}^t + \mathbf{Y}^t$. Transpon zbira matrica jednak je zbiru transponovanih matrica;

- $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \mathbf{XZ} + \mathbf{YZ}$; $\mathbf{Z}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{ZX} + \mathbf{ZY}$. Množenje je operacija distributivna i sleva i zdesna u odnosu na sabiranje matrica;

- $(\mathbf{XY})^t = \mathbf{Y}^t\,\mathbf{X}^t$; $(\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_k)^t = \mathbf{X}_k^{\,t} \cdots \mathbf{X}_2^{\,t}\,\mathbf{X}_1^{\,t}$
  Transpon proizvoda dveju ili više matrica jednak je proizvodu transpona ovih matrica u obrnutom redosledu.

Primer 1:

Ako je $\mathbf{e}^t = (1\ 1\ 1)$ vektor jedinica (sumacioni vektor) reda 1x3, a matrica **Y** ista kao u prethodnom primeru, onda je $\mathbf{e}^t\mathbf{Y}$ jednako:

1 * 1 + 1 * 0 + 1 * 0 = 1;
1 * 2 + 1 * 1 + 1 * (-1) =2;

$$\text{tj. } \mathbf{e}^t\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da smo ovim množenjem dobili matricu, tj. vektor u kojem su elementi zapravo zbirovi kolona matrice **Y**.

Primer 2:

Ako je **R** matrica interkorelacija tri varijable

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

a vektor $\mathbf{b}^*$ vektor parcijalnih regresionih koeficijenata:[213]

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix},$$

tada je proizvod $\mathbf{Rb}^*$ jednak:

[213] Na ovaj primer čitalac se može vratiti kada proučava multiplu regresionu analizu (glava **XIV**)

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 * b_1^* + r_{12} * b_2^* + r_{13} * b_3^* \\ r_{21} * b_1^* + 1 * b_2^* + r_{23} * b_3^* \\ r_{31} * b_1^* + r_{32} * b_2^* + 1 * b_3^* \end{bmatrix}$$

Dobili smo, dakle, vektor **q** reda 3x1. (U konkretnom slučaju, kao što je poznato iz regresione analize, elementi vektora **q** su korelacije prediktorskih varijabli sa kriterijumskom varijablom.)

4. SIMETRIČNE MATRICE

U analizi podataka u psihologiji veoma se često sreću simetrične matrice, tj. matrice čiji su odgovarajući elementi sa jedne i druge strane glavne dijagonale jednaki. Naime, element u prvom redu i drugoj koloni takvih matrica jednak je elementu u drugom redu i prvoj koloni i tako redom. Tako izgledaju, na primer, matrice kovarijansi i matrice interkorelacija. Takva je matrica **R** u prethodnom primeru br. 2. Jednostavnije rečeno, simetrične matrice jednake su svom transponu.

Zapamtite:

- Proizvod dveju simetričnih matrica nije nužno simetrična matrica;
- Kao proizvod matrice i njenog transpona u bilo kojem redosledu ($\mathbf{X}^t\mathbf{X}$ ili $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$) dobija se simetrična matrica.

5. TRAG MATRICE

Trag kvadratne matrice **X**, u oznaci trag (**X**) ili tr (**X**), jednak je zbiru elemenata na glavnoj dijagonali matrice. Očigledno, trag imaju samo kvadratne matrice.

Ako je matrica **X** reda mxm, tada je trag matrice **X**:

$$\boxed{\operatorname{tr}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} x_{ii}}$$

6. DETERMINANTA MATRICE

Jedna od vrlo važnih skalarnih funkcija matrice je njena determinanta.[214] Determinantu mogu imati samo kvadratne matrice. Budući da je formalna definicija determinante prilično komplikovana, u ovom tekstu ćemo determinantu opisati tako da čitalac stekne samo opštu predstavu o njoj:

[214] Skalarne funkcije matrice preslikavaju elemente matrice u jedan broj, skalar. Dakle, kao rezultat neke funkcije u koju su uključeni elementi matrice dobijamo jedan broj.

Determinanta matrice **X** reda mxm, u oznaci $|\mathbf{X}|$, dobija se tako što se sabere m! (m faktorijel) proizvoda,[215] pri čemu svaki proizvod ima pozitivan ili negativan predznak, a svaki proizvod sastavljen je od m elemenata matrice.[216] Pored toga, u jednom istom proizvodu ne smeju biti dva elementa iz istog reda ili iste kolone matrice. Očigledno, vrednost determinante zavisi od svih elemenata u matrici.

Ilustrovaćemo računanje determinante na veoma jednostavnom primeru. Ako je matrica **X**, reda 2x2, takva da je:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

onda je determinanta matrice **X**, $|\mathbf{X}| = 6 * 4 - 2 * 3 = 24 - 6 = 18$.
Uočimo da smo sabrali 2! (čita se kao *dva faktorijel*), tj. 2 proizvoda. Prvi ima pozitivan, a drugi negativan predznak, iz razloga koje nećemo ovde objasniti. Ni u jednom od ova dva proizvoda nema dva elementa koji su iz istog reda ili iste kolone matrice.
Determinanta matrice je važna jer se, između ostalog, na osnovu vrednosti determinante matrice može ustanoviti da li matrica može imati **regularni inverz** (inverz je objašnjen u nastavku teksta). Ako je determinanta neke matrice jednaka nuli, tj. ako je $|\mathbf{X}| = 0$, matrica **X** je **singularna** i nema regularni inverz.

Kolone matrice podataka možemo posmatrati kao skup varijabli ili vektora. Matrica podataka čije kolone ne predstavljaju linearno nezavisan skup vektora ima determinantu jednaku 0 i ne može imati regularni inverz. Ako, na primer, u matrici podataka, čiji regularni inverz je potrebno naći tokom statističke analize, postoji varijabla koja je zbir nekih od preostalih varijabli u matrici, regularni inverz takve matrice nećemo moći izračunati.

Osim navedenog, determinanta matrice u mnogim multivarijacionim analizama može poslužiti kao mera **generalizovane varijanse** skupa varijabli koje se nalaze u kolonama matrice.[217]

7. REGULARNI INVERZ MATRICE

Umesto deljenja kakvo je definisano u skalarnoj algebri, u matričnoj algebri postoji operacija množenja regularnim inverzom matrice. Dakle, umesto da matricu **X** „podelimo“ matricom **Y**, u matričnoj algebri zapravo matricu **X** množimo regularnim inverzom matrice **Y**. Regularni inverz matrice označava se obično eksponentom -1 nad oznakom matrice. Na primer, regularni inverz matrice **Y** obeležili bismo oznakom $\mathbf{Y}^{-1}$.

Regularni inverz mogu imati samo neke kvadratne matrice. Kvadratne matrice čija je determinanta jednaka nuli zovu se singularne matrice i nemaju regularni inverz. Za pravougaone matrice i singularne kvadratne matrice koje nemaju regularni inverz postoje tzv. **generalizovani inverzi**.

[215] m faktorijel, u oznaci m!, jednak je proizvodu celih brojeva od 1 do m. Ako je, na primer, m = 5, tada je 5! = 5 * 4* 3 * 2 * 1 = 120.
[216] Postupak kojim se određuje da li proizvod ima pozitivan ili negativan predznak objašnjen je u udžbenicima linearne algebre.
[217] O ovome se može pročitati u Kovačić, 1994.

Sam postupak nalaženja regularnog inverza matrice prilično je zametan i neće biti objašnjen u ovom tekstu. Definisaćemo regularni inverz matrice preko njegovog ključnog svojstva:

Regularni inverz matrice **X**, u oznaci, $\mathbf{X}^{-1}$, jeste matrica koja ima sledeću osobinu:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}\,\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I},$$

pri čemu je **I** matrica identiteta.

Dakle, kada matricu **X** pomnožimo njenim regularnim inverzom bilo sa koje strane dobijamo kao rezultat matricu identiteta, tj. dijagonalnu matricu u čijoj glavnoj dijagonali su svi elementi jednaki jedinici. Analogija sa „recipročnom vrednošću" nekog broja iz skalarne algebre je očigledna: kao što znamo iz skalarne algebre, kada se neki broj pomnoži svojom recipročnom vrednošću sa bilo koje strane, kao rezultat množenja dobija se jedinica.

Zapamtite:

- $(\mathbf{X}^{-1})^{-1} = \mathbf{X}$. Regularni inverz inverza matrice **X** jednak je matrici **X**;
- $(\mathbf{XY})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\,\mathbf{X}^{-1}$; $(\mathbf{X}_1\,\mathbf{X}_2 \cdots \mathbf{X}_k)^{-1} = \mathbf{X}_k^{-1} \cdots \mathbf{X}_2^{-1}\,\mathbf{X}_1^{-1}$.
  Regularni inverz proizvoda dveju ili više matrica jednak je proizvodu pojedinih regularnih inverza ovih matrica u obrnutom redosledu;
- Regularni inverz dijagonalne matrice **D** je dijagonalna matrica $\mathbf{D}^{-1}$ čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki recipročnim vrednostima matrice **D**;
- Regularni inverz matrice identiteta **I** je matrica identiteta.

8. ORTOGONALNE MATRICE

Matrice u čijim kolonama ili redovima su vektori jedinične dužine, pri čemu bilo koja dva različita reda ili bilo koje dve različite kolone predstavljaju međusobno ortogonalne vektore, jesu ortogonalne matrice.
Preciznije, kvadratna matrica **P** je ortogonalna, akko („ako i samo ako") je njen regularni inverz jednak njenom transponu, tj. akko $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{t}$.

Za ortogonalne matrice, stoga, važi i sledeće:

$$\mathbf{P}^{t}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{t} = \mathbf{I}.$$

9. RANG MATRICE

Rang matrice jednak je maksimalnom broju linearno nezavisnih redova ili kolona u matrici. Ako je reč o kvadratnoj matrici, njen rang može biti jednak broju redova ili kolona u matrici, ali može biti i manji. Ako je matrica pravougaona, njen rang ne može biti veći od njene manje dimenzije.

10. SVOJSTVENE VREDNOSTI I SVOJSTVENI VEKTORI MATRICE

Ako je $\mathbf{R}$ kvadratna matrica reda m$\times$m, $\mathbf{x}$ vektor reda m$\times$1 čiji je bar jedan element različit od nule ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), a λ skalar, takav da je $\mathbf{Rx} = \lambda\mathbf{x}$, tada je λ svojstvena ili karakteristična vrednost (engl. eigenvalue) matrice $\mathbf{R}$, a $\mathbf{x}$ je karakterističan ili svojstven vektor matrice $\mathbf{R}$. Svojstvene vrednosti i svojstveni vektori simetričnih matrica imaju neka važna i specifična svojstva koja nemaju svojstvene vrednosti i svojstveni vektori nesimetričnih kvadratnih matrica. Na određivanju svojstvenih vrednosti i svojstvenih vektora matrice zasniva se veliki broj multivarijacionih statističkih postupaka.[218]

Matrična jednačina $\mathbf{Rx} = \lambda\mathbf{x}$, koja definiše svojstvene vrednosti može se, prebacivanjem izraza $\lambda\mathbf{x}$ na levu stranu, napisati i u sledećem obliku: $\mathbf{Rx} - \lambda\mathbf{Ix} = \mathbf{0}$, pri čemu je $\mathbf{0}$ vektor nula, tj. vektor čiji su svi elementi jednaki nuli, a $\mathbf{I}$ matrica identiteta. Budući da kvadratna matrica reda m$\times$m ima m svojstvenih vrednosti, onda ćemo uvesti indeks p uz oznaku svojstvene vrednosti i ovu matričnu jednačinu napisati u sledećem obliku: $\mathbf{Rx} - \lambda_p\mathbf{Ix} = \mathbf{0}.$ Rešenje matrične jednačine $(\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I})\ \mathbf{x}_p = \mathbf{0}$ ne može se dobiti njenim množenjem sa inverzom matrice $(\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I})$, tj. matricom $(\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I})^{-1}$, što je inače uobičajen postupak. Kada bismo to uradili, dobili bismo $\mathbf{x}_p = (\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I})^{-1}\ \mathbf{0} = \mathbf{0}$, što je u kontradikciji sa zahtevom da je $\mathbf{x}_p \neq \mathbf{0}$. Zato $\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I}$ ne sme imati regularni inverz, tj. mora biti singularna. To znači da tražimo λ_p takvo da je determinanta $|\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I}| = 0$, a time se rešavanje svodi na rešavanje sistema m homogenih jednačina sa m nepoznatih. Dakle, svojstvene vrednosti, kada se oduzmu od dijagonalnih elemenata matrice **R,** pretvaraju tu matricu u singularnu matricu, tj. matricu $\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}.$ Matrica $\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}$ nema regularni inverz, a njena determinanta jednaka je nuli. Izraz $|\mathbf{R} - \lambda_p\mathbf{I}| = 0$ zove se karakteristična jednačina matrice $\mathbf{R}$, a sama determinanta $|\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I}|$ je karakteristična funkcija matrice $\mathbf{R}$.
Daljim razvojem determinante dobijamo polinomsku jednačinu po λ stepena m:

$$f(\lambda) = (-\lambda)^m + b_{m-1}(-\lambda)^{m-1} + \cdots + b_1(-\lambda) + b_0 = 0$$

Ova jednačina je **karakteristični polinom** matrice $\mathbf{R}$, a λ_1, λ_2,..., λ_m jesu karakteristični koreni ili **svojstvene vrednosti** (engl. eigenvalues) matrice $\mathbf{R}$. Njihovim nalaženjem dobijamo i njima odgovarajuće karakteristične, svojstvene vektore $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$. Dakle, svakoj svojstvenoj vrednosti odgovara određeni svojstveni vektor.
Ako konstruišemo dijagonalnu matricu

$$\Lambda = (\lambda_p)\ (p = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}),$$

dakle, matricu čiji su dijagonalni elementi svojstvene vrednosti, poređane po veličini od gornjeg levog ka donjem desnom uglu matrice, i kvadratnu matricu

[218] Dodatna objašnjenja svojstvenih vrednosti i svojstvenih vektora data su u okviru izlaganja Analize glavnih komponenata (glava **XX**).

$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_p)$ $(p = 1, 2,..., m)$

u čijim kolonama su svojstveni vektori, tada, ako je matrica **R** simetrična, važi sledeće:

$$\mathbf{X}^t\mathbf{R}\mathbf{X} = \Lambda, \text{ a odatle } \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^t = \mathbf{R}.$$

Pošto je **R** simetrična matrica, **X** je ortogonalna matrica. Dakle, važi sledeće: $\mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{X}^t = \mathrm{I}$. Budući da je Λ dijagonalna matrica, očito je da se simetrična matrica može transformisati u dijagonalnu matricu njenim množenjem sa desne strane ortogonalnom matricom i njenim množenjem sa leve strane transponom ortogonalne matrice. Budući da se skup različitih svojstvenih vrednosti matrice zove spektralni skup, dekompozicija simetrične matrice
na proizvod transpona ortogonalne matrice svojstvenih vektora, dijagonalne matrice svojstvenih vrednosti i ortogonalne matrice svojstvenih vektora naziva se spektralnom dekompozicijom matrice.

Zapamtite:

- Zbir svojstvenih vrednosti matrice **R** jednak je njenom tragu, a proizvod svojstvenih vrednosti matrice **R** jednak je determinantni te matrice:

$$\sum_{p=1}^{m} \lambda_p = \mathrm{tr}\,(\mathrm{R}); \qquad \prod_{p=1}^{m} \lambda_p = |\mathrm{R}|.$$

  Na osnovu drugog izraza očigledno je da, ako je matrica **R** singularna, bar jedna njena svojstvena vrednost mora biti jednaka 0, jer je determinanta singularne matrice jednaka nuli;

- Ako je matrica **R** simetrična, svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima ove matrice međusobno u ortogonalni. Ako, pak, matrica **R** nije simetrična, svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrednostima ove matrice nisu međusobno ortogonalni.

11. KVADRATNA FORMA

Ako je **R** simetrična matrica reda mxm, a **b** vektor reda mx1, tada se izraz

$$\mathrm{b}^t\mathrm{R}\mathrm{b} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{b}_j \mathrm{b}_k \mathrm{r}_{jk}$$

zove kvadratna forma matrice **R**. Na osnovu pravila o množenju matrica očigledno je da se kao rezultat množenja $\mathbf{b}^t\mathbf{R}\mathbf{b}$ dobija skalar, tj. jedan broj.

Kvadratnom formom matrice u statistici se često izražava varijansa linearne kombinacije varijabli koje su u kolonama matrice.